

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys II 2009

Övning inför det första kursförhøret

- (1) Beräkna

$$\int_1^3 x^2 e^{x^3} dx.$$

Identifiera derivatan av en sammansatt funktion.

- (2) Beräkna

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Tips: Se slutet i høstens kompendium som behandlar hyperboliska funktioner.

- (3) Beräkna

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}.$$

En modifikation av föregående uppgift.

- (4) Beräkna

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

Partiell integrering hjälper.

- (5) Beräkna

$$\int_1^e x \ln x dx.$$

Partiell integrering hjälper

- (6) Beräkna med partiell integrering.

$$\int_1^e \cos(\ln x) dx.$$

- (7) Beräkna med substitutionen $x^2 = t$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2 dx.$$

- (8) Med partiell integrering

$$\int_0^{\pi/3} e^x \cos x dx.$$

- (9) beräkna

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$$

med substitutionen $x = \sinh t$.

(10) Beräkna

$$\int_0^1 \sqrt{2+3x^2} dx$$

med en motsvarande substitution som i föregående tal.

(11) Beräkna

$$\int_2^3 \frac{x+1}{x^2+1} dx.$$

(12) beräkna

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x+1} dx.$$

(13) Beräkna

$$\int_1^e \frac{x^4+2x+3}{4x^2} dx.$$

(14) Beräkna

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Det lönar sig att ta en titt på de sista sidorna i höstens kompendium

...

(15) Derivera

$$f(x) = \int_{e^x}^{e^{x^2}} e^{t^2} dt$$

(när $x > 1$.)

(16) Visa att

$$\int_0^1 e^{\sin x} dx \leq e - 1.$$

Obs: Du kan INTE bestämma integralen exakt. Visa först med hjälp av medelvärdessatsen att $\sin x \leq x$ för alla $x \in [0, 1]$.)

(17) Beräkna

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x^2+3)} dx$$

genom att hitta tal A , B och C , för vilka

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx}{x^2+3} + \frac{C}{x^2+3}.$$

(18) Beräkna

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

genom att substituera $t = \tan(\frac{1}{2}x)$.

- (19) Anta att funktionen $f : [1, 3] \rightarrow [2, 4]$ är strängt växande och deriverbar samt att derivatan är kontinuerlig i intervallet $[1, 3]$, och att $f(1) = 2$ och $f(3) = 4$. Beräkna

$$\int_2^4 f^{-1}(x) dx + \int_1^3 f(t) dt.$$

Tips: Substituera i inversfunktionens integral $x = f(t)$. Uttrycket $tf'(t)$ lönar det sig att integrera partiellt. Rita bild!

- (20) Vi betraktar funktionen $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, för vilken $f(x) = 2$ när $x \neq 1$ och $f(1) = -5$. Ge ett exempel på en delning D av intervallet $[0, 2]$, för vilken det gäller att $S_D - s_D < 2^{-100}$.
- (21) Vi betraktar funktionen $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ där $f(x) = e^{\sin x}$. Ge ett exempel på en delning D , för vilken $S_D - s_D < 10^{-100}$. Tips: undersök delningar med jämna intervall. Se även exempel 2.8 i kompendiet.
- (22) Beräkna med hjälp av Riemannintegralen

$$\int_{-1}^1 3x dx.$$

- (23) beräkna med hjälp av Riemannintegralen

$$\int_0^1 e^x dx.$$

Tips: Använd delningar med jämna intervall. Tillämpa summaformeln för geometriska följder. Notera att

$$\frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \rightarrow -1$$

när $n \rightarrow \infty$ (eftersom det är frågan om en differenskvot).

- (24) Konvergerar eller divergerar den oegentliga integralen

$$\int_0^1 \frac{\cos^2(e^x) + 1}{x^2} dx?$$

- (25) Konvergerar eller divergerar den oegentliga integralen

$$\int_1^\infty \frac{\cos^2(e^x)}{x^2} dx?$$

- (26) Konvergerar eller divergerar den oegentliga integralen

$$\int_1^\infty \frac{\cos(e^x)}{x^2} dx?$$

Tips: absolut konvergens .

- (27) Konvergerar eller divergerar

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right) dx?$$

- (28) Konvergerar eller divergerar

$$\int_1^{\infty} \frac{x^7}{e^x} dx?$$

Tips: Notera att $e^x > x^9$ när x är tillräckligt stort. (Kommer du ihåg från höstens kurs vad detta beror på?)

- (29) Konvergerar eller divergerar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx?$$

Tips: Korollarium 2.3 på sida 53.

- (30) Konvergerar eller divergerar den oegentliga integralen

$$\int_0^1 \frac{\cos^2(e^x)}{x^2} dx?$$

- (31) Vi antar att
- $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
- är kontinuerlig,
- $f(0) = 0$
- , och att
- $f'(0) = 3$
- . (Här avser vi högerderivatan.) Visa att

$$\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$$

divergerar.

- (32) Är funktionen $f(x) = x^7$ likformigt kontinuerlig i (a) $] - 1, 3[$; (b) $] - 1, \infty[$?
- (33) Är funktionen $f :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ likformigt kontinuerlig om det för alla $x > 1$ gäller $f(x) = \ln x$?
- (34) Är funktionen $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ likformigt kontinuerlig om $f(x) = \ln x$ när $0 < x < 1$?
- (35) Är funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ likformigt kontinuerlig om $f(x) = \sqrt[5]{x}$ för alla x ?