INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Övning 8
För veckan som börjar 23.3.2009

För deltagande i handledningarna utlovas tilläggspoäng: om från och med den 23.3 deltar i 4 - 5 handledningar får man 2 poäng och om deltar i 3 får man ett poäng.

1. Vi betraktar funktionerna $f_n :]-1, 2[\to \mathbb{R}$ som definieras med villkoret $f_n(x) = \frac{1}{n}x^2$. Konvergerar följden (f_n) punktvis? Konvergerar den likformigt?

2. Vi betraktar funktionerna $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras med villkoret $f_n(x) = \frac{1}{n}x^2$. Konvergerar följden (f_n) punktvis? Konvergerar den likformigt?

3. Vi betraktar funktionerna $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ som definieras med villkoret $f_n(x) = n - n^2x$ när $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ och $f_n(x) = 0$ för övriga x. Konvergerar följden (f_n) punktvis? Konvergerar den likformigt? Existerar det ett gränsvärde

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx?$$

4. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{n}\sin(e^{\cos x}))\, dx.$$

Använd likformig kontinuitet. (Kontrollera att vi har likformig kontinuitet!)

5. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + \frac{1}{n})^{nx}\, dx.$$

Använd likformig kontinuitet. (Kontrollera att vi har likformig kontinuitet!) Kom även ihåg definitionen av talet e.

6. Vi antar att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och definierar funktionerna $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$.
(a) Anta att f är kontinuerlig. Visa att följden (f_n) konvergerar punktvis.
(b) Anta att f är likformigt kontinuerlig. Visa att (f_n) konvergerar likformigt.