INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Övning 4
För veckan som börjar 9 . 2. 2009

1. Beräkna

$$\int_2^3 \left(\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x+1}\right) dx.$$

2. Beräkna

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{-x^2-2x+1}\, dx$$

Tips: kvadratkomplettera under roten och modifiera den integrerade funktionen till formen $\sqrt{1-p(x)^2}$. Substituera sedan $p(x) = \sin t$.

3. Bestäm längden av grafen av funktionen $f(x) = x^2$ mellan punkterna $x = 0$ och $x = 1$ hjälp av Korollarium 9.11 på sida 44.

Tips: använd substitutionen $x = \frac{1}{2} \sinh t$ när du bestämmer integralen.

4. Varför måste

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2-1}\, dx$$

tolkas som en oegentlig integral? Konvergerar eller divergerar den?

5. Vi antar att funktionen $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ är strängt växande och deriverbar samt att dess derivata är kontinuerlig i intervallet $[1,3]$. Vi antar dessutom att $f(1) = 2$ och $f(3) = 5$ och att $\int_1^3 f(t)\, dt = 8$. Bestäm den inversa funktionens integral

$$\int_2^5 f^{-1}(x)\, dx.$$

Tips: Substituera $x = f(t)$ i den inversa funktionens integral. Uttrycket $tf'(t)$ lönar det sig att integrera partiellt. Rita bild!

6. Vi antar att den andra derivatan f'' till funktionen f är kontinuerlig i intervallet $]-1,1[$. Vi antar att $x \in]0,1[$.

(a) Kontrollera först att ekvationen

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$$

gäller när $x \in]0,1[$.

(b) Applicera partiell integrering på denna integral genom att tänka dig att $f'(t) = 1f'(t)$ och att 1 är derivatan av $-(x-t)$ med avseende på t. Resultatet borde vara av typen $f(x) = f(0) + xf'(0)+$ en integral. (Obs: resultatet gäller också när $x \in]-1, 0[$.