MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 9
17. 11. 2008 alkavalle viikolle

Muista, että omat kysymykset ovat edelleenkin ohjauksissa tärkeintä pohdittavaa. Ja että kaikkea saa kysyä!

1. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia kohdassa x. Tällöin karakterisointilauseen nojalla on

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h)$$

ja

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h),$$

missä $\varepsilon_1(h) \to 0$ ja $\varepsilon_2(h) \to 0$ kun $h \to 0$. Muokkaa tuloa

$$(f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h))(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h))$$

ja päättele sekä tulon fg derivoituvuus kohdassa x että tulon derivointisääntö.

Ratkaisu: Haluamme saada funktioiden tulolle kehitelmän

$$(fg)(x+h) = (fg)(x) + Ah + h\varepsilon_3(h)$$

missä $\varepsilon_3(h) \to 0$ kun $h \to 0$, jollakin sopivalla A (joka tulee tietysti olemaan tulofunktion fg derivaatta). Tätä varten toimitaan vihjeen mukaisesti:

$$\begin{aligned}
(fg)(x+h) &= f(x+h)g(x+h) \\
&= \Big(f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h)\Big)\Big(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h)\Big) \\
&= f(x)g(x) + f(x)g'(x)h + f(x)h\varepsilon_2(h) + f'(x)g(x)h \\
&\quad + f'(x)g'(x)h^2 + f'(x)h^2\varepsilon_2(h) + h\varepsilon_1(h)(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h)) \\
&= f(x)g(x) + h(f'(x)g(x) + g(x)f'(x)) \\
&\quad + h\Big(\underbrace{f(x)\varepsilon_2(h) + hf'(x)g'(x) + \varepsilon_1(h)(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h))}_{:=\varepsilon_3(h)}\Big) \\
&= (fg)(x) + h\Big(f'(x)g(x) + g(x)f'(x)\Big) + h\varepsilon_3(h). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nyt meillä on haluamamme kehitelmä, ja enää pitää todistaa, että $\varepsilon_3(h) \to 0$ kun $h \to 0$. Mutta

$$\begin{aligned}\varepsilon_3(h) &= f(x)\varepsilon_2(h) + hf'(x)g'(x) + \varepsilon_1(h)\Big(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h)\Big)\\ &\to f(x)\cdot 0 + 0\cdot f'(x)g'(x) + 0\cdot\Big(g(x) + g'(x)\cdot 0 + 0\Big) = 0,\end{aligned}$$

kun $h \to 0$. Nyt karakterisointilauseesta seuraa, että funktio fg on derivoituva kohdassa x ja sen derivaatta on $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g(x)f'(x)$.

2. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[1,3]$ ja derivoituva välillä $]1,3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1,3[$ pätee $1 \leq f'(x) \leq 2$. Mitä tiedetään arvosta $f(3)$, jos $f(1) = 0$? Miten voit perustella tuloksesi kurssilla tähän mennessä olleiden tietojen nojalla?

Ratkaisu: Käytetään väliarvolausetta (tehtävänannossa annetut oletukset ovat toteuttavat DVAL:in oletukset, joten voimme soveltaa sitä): on olemassa $\xi \in]1,3[$ niin, että

$$f(3) - f(1) = f'(\xi)(3-1) = 2f'(\xi).$$

Koska $f(1) = 0$, ylläoleva identiteetti saa muodon

$$f(3) = 2f'(\xi).$$

Toisaalta derivaattafunktiosta tehdyn oletuksen nojalla

$$2 \leq 2f'(\xi) = f(3) \leq 4.$$

Siis arvosta $f(3)$ tiedetään, että se on suljetulla välillä $[2,4]$.

3. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[1,3]$ ja derivoituva välillä $]1,3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1,3[$ pätee $1 \leq f'(x) \leq 2$. Mitä tiedetään arvosta $f(1)$, jos $f(3) = 0$? Miten voit perustella tuloksesi kurssilla tähän mennessä olleiden tietojen nojalla?

Ratkaisu: Kuten äsken, voimme edelleen soveltaa väliarvolausetta. Edellisen tehtävän identiteetti

$$f(3) - f(1) = 2f'(\xi) \text{ jollakin } \xi \in]1,3[$$

saa nyt muodon

$$-f(1) = 2f'(\xi),$$

(Koska $f(3) = 0$). Saamme siis $2 \leq -f(1) \leq 4$, eli, kertomalla epäyhtälöt -1:llä, $-4 \leq f(1) \leq -2$ (tai $f(1) \in [-4, -2]$).

4. Oletetaan, että $|x-3| < 10^{-100}$. Arvioi väliarvolauseen avulla itseisarvoa $|x^2 + x - 12|$. Kannattaa huomata, että $3^2 + 3 = 12$.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^2 + x$, jolloin arvioitava lauseke on muotoa $|f(x) - 12| = |f(x) - f(3)|$. Derivoimalla f:ää saadaan $f'(x) = 2x + 1$. Kun $|x - 3| < 10^{-100}$ niin x kuuluu varmasti välille $]2, 4[$. Tästä saamme derivaatalle arvion

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 < f'(\xi) < 2 \cdot 4 + 1 = 9,$$

aina kun $|\xi - 3| < 10^{-100}$.

Sovelletaan väliarvolausetta : jos $x < 3$ niin on olemassa $x < \xi < 3$ niin, että $f(3) - f(x) = f'(\xi)(3 - x) = f'(\xi)|x - 3|$ (tarkemmin sanoen sovelletaan väliarvolausetta funktioon f rajoitettuna välille $[x, 3]$. Väliarvolauseen oletukset ovat tietysti voimassa, eli funktio on tällä välillä jatkuva, ja lisäksi derivoituva avoimella välillä $]x, 3[$);
jos $x > 3$ niin on olemassa $3 < \xi' < x$ niin, että
$f(x) - f(3) = f'(\xi')(x - 3) = f'(\xi')|x - 3|$
(vastaava huomautus kuin kohdassa '$x < 3$').

Kaiken kaikkiaan löydämme siis χ siten, että $|\chi - 3| < 10^{-100}$ ja
$|f(x) - f(3)| = f'(\chi)|x - 3|$ (valitsemalla joko ξ:n tai ξ':n). Toisaalta näimme juuri, että $5 < f'(\chi) < 9$, joten

$$5 \cdot 10^{-100} < |f(x) - f(3)| < 9 \cdot 10^{-100}.$$