Analyysi 1 Ohjaus 6

29.10.-31.10. 2008

Tehtävä 1 Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \to 2}(3x^2 - 4x) = 4$$

Etsimällä esimerkiksi toisen asteen polynomin nollakohdat voimme kirjoittaa

$$|(3x^2 - 4x) - 4| = |(x-2)(3x+2)|$$

Tarkastellaan niitä x joilla $1 < x < 3$, jolloin $5 < 3x + 2 < 11$ ja tällöin saamme, että

$$|(3x^2 - 4x) - 4| \leq 11|(x-2)|$$

Ja edelleen $11|x-2| < 3 \Longleftrightarrow |x-2| < \varepsilon/11$.

Siis. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta_\varepsilon = min\{1, \varepsilon\}$. Tällöin on voimassa

$$|(3x^2 - 4x) - 4| < \varepsilon,$$

kun $0 < |x-2| < \delta_\varepsilon$.

Tehtävä 2 Osoita funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien perusteella, että funktio f jolle kaikilla x pätee $f(x) = 3x^2 - 4x$ on jatkuva kohdassa $x = 5$.

Funktio f on määritelty pisteen $x = 5$ ympäristössä; tässä tapauksessa voimme ajatella f:n määritellyksi maksimaalisessa määritellyjoukossa, joka on R sillä kyseessä on polynomifunktio. Näin ollen luentojen kappaleen 6 alun nojalla f on jatkuva kohdassa $x = 5$ jos ja vain jos $\lim_{x \to 5} f(x) = f(5)$.

Osoitamme seuraavaksi tämän:

$f(5) = 55$ ja

$$|f(x) - f(5)| = |(3x^2 - 4x) - 55| = |(x - 5)(3x + 11)|.$$

Rajoitutaan niihin x, joilla $4 < x < 6$, jolloin $23 < 3x + 11 < 29$. Nyt saamme että $|f(x)-f(5)| \leq 29|x-5|$. ja edelleen $29|x-5| < \varepsilon \iff |x-5| < \varepsilon/29$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta_\varepsilon = \min 1, \varepsilon/29$. Tällöin

$$|f(x) - f(5)| < \varepsilon,$$

kun $0 < |x - 5| < \delta_\varepsilon$. Eli $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$ ja väite on näin ollen todistettu.

Tehtävä 3 Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien perusteella, että funktio f jolle kaikilla x pätee $f(x) = 3x^2 - 4x$ on derivoituva kohdassa $x = 1$.

Tarkastelemme funktion f erotusosamäärää pisteessä $x = 1$. Saamme, että

$$\begin{aligned}&(f(1+h) - f(1))/h = (3(1+h)^2 - 4(1+h) - (-1))/h\\ &= (3h^2 + 2h)/h = 3h + 2.\end{aligned}$$

Tämän nojalla erotusosamäärän raja-arvo näyttäisi olevan 2. Todistamme tämän vielä määritelmän nojalla:

$$|(f(1+h) - f(1))/h - 2| = |(3h + 2) - 2| = |3h| = 3|h - 0|$$

Lisäksi $3|h - 0| < \varepsilon \iff |h - 0| < \varepsilon/3$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta_\varepsilon = \varepsilon/3$. Tällöin edellä tarkastellun nojalla

$$|(f(1+h) - f(1))/h - 2| = 3|h - 0| < \varepsilon,$$

kun $0 < |h - 0| < \delta_\varepsilon$.

Näinollen raja-arvon määritelmän nojalla $\lim_{h\to 0}(f(1+h) - f(1))/h = 2$. Joten derivaatan määritelmän nojalla f on derivoituva kohdassa $x = 1$ ja $f'(1) = 2$.

Tehtävä 4 Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että väite

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x) = 5$$

ei pidä paikkaansa. Älä siis vetoa tehtävään 1 ja raja-arvon yksikäsitteisyyteen.

Tarkastelemme funktion arvon ja raja-arvo ehdokkaan välisen erotuksen itseisarvoa ja pyrimme osoittamaan, että tämä on suurempi kuin jokin aidosto positiivinen luku jossakin pisteen $x = 2$ ympäristössä. Soveltamalla kolmioepäyhtälön vasenta puolta saamme, että

$$\begin{aligned}&|(3x^2 - 4x) - 5| = |(3x^2 - 4x - 4) - 1| \\ &= |(x - 2)(3x + 2) + (-1)| \geq ||(x - 2)(3x + 2)| - | - 1||.\end{aligned}$$

Tarkastellaan niitä x joilla $1 < x < 3$. Tällöin $|3x + 2| < 11$. Rajoitamme tarkastelualuetta vielä lisää niihin x joilla $|x-2| < 1/22$. Näillä x on voimassa

$$\begin{aligned}&|(3x^2 - 4x) - 5| \geq |1 - |x - 2||3x + 2|| \\ &= 1 - |x - 2||3x + 2| \geq 1 - \tfrac{1}{22}11 = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Siis jos esimerkiksi valitsemme $\varepsilon = \frac{1}{4}$, niin ei ole olemassa lukua $\delta_\varepsilon > 0$ siten että

$$|(3x^2 - 4x) - 5| < \varepsilon, \quad \text{kun } 0 < |x - 2| < \delta_\varepsilon$$

Joten olemme todistaneet halutun tuloksen.