Analyysi 1   Ohjaus toista kurssikoetta varten

8.12.-10.12. 2008

Tehtävä 1 Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x+1)(x-1)}{2x}+\frac{2x}{(x+1)(x-1)}\right).$$

Sovellamme luentojen Lause 5.4:ää(s.34). Koska $\lim_{x\to 3} x = 3$ ja vakiofunktion raja-arvo on ko. vakio, niin Lause 5.4:n nojalla saamme:

$$\begin{array}{l}
\lim_{x\to 3}(x+1) = \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 1 = 3+1 = 4 \\
\lim_{x\to 3}(x-1) = \lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 1 = 3-1 = 2 \\
\lim_{x\to 3}(2x) = 2\lim_{x\to 3} x = 23 = 6
\end{array}$$

Ja edelleen koska ym. raja-arvot ovat reaalilukuja ja $\neq 0$, niin

$$\lim_{x\to 3}(x+1)(x-1) = \lim_{x\to 3}(x+1)\lim_{x\to 3}(x-1) = 42 = 8$$

Edelleen tämän ja edellisten nojalla koska raja-arvot ovat $\neq 0$ saamme

$$\begin{array}{l}
\lim_{x\to 3} \frac{(x+1)(x-1)}{2x} = \frac{\lim_{x\to 3}(x+1)(x-1)}{\lim_{x\to 3} 2x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \\
\lim_{x\to 3} \frac{2x(x+1)(x-1)}{=} \frac{\lim_{x\to 3} 2x}{\lim_{x\to 3}(x+1)(x-1)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},
\end{array}$$

Tämän nojalla käyttäen Lause 5.4:ää kohta (1) kysytty raja-arvo on

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x+1)(x-1)}{2x}+\frac{2x}{(x+1)(x-1)}\right) = \frac{4}{3}+\frac{3}{4} = \frac{25}{12}.$$

Tehtävä 2 Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että $f'(1) = -3$, jos kaikilla $x > \frac{1}{2}$ pätee

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1}.$$

Tarkastelemme funktion f erotusosamäärää pisteessä $x = 1$. Saamme, että

$$\begin{aligned}
&(f(1+h) - f(1))/h = (\tfrac{(1+h)+1}{2(1+h)-1} - 2)/h \\
&= (\tfrac{(2+h)}{1+2h} - 2)/h = (\tfrac{-3h}{1+2h})/h \\
&= \tfrac{-3h}{(1+2h)h} = -\tfrac{3}{1+2h}
\end{aligned}$$

Ja edelleen kun rajoitumme välille $h \in [-1/4, 1/4]$ saamme, että

$$\begin{aligned}
&|(f(1+h) - f(1))/h - (-3)| = |-\tfrac{3}{1+2h} + 3| \\
&= |\tfrac{-3+3(1+2h)}{1+2h}| = |\tfrac{6h}{1+2h}| \\
&= \tfrac{6|h|}{|1+2h|} \leq \tfrac{6|h|}{||1|-|2h||} \leq \tfrac{6|h|}{1-2\frac{1}{4}} = 12|h|
\end{aligned}$$

Tässä ensimmäisessä epäyhtälössä olemme soveltaneet kolmioepäyhtälön vasenta puolta ja toisessa epäyhtälössä sitä että olemme rajoittuneet välille $h \in [-1/4, 1/4]$.

Nyt edelleen $12|h| < \varepsilon \iff |h| < \varepsilon/12$.

Siis. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta_\varepsilon = \min(\varepsilon/12, 1/4)$. Tällöin

$$|(f(1+h) - f(1))/h - (-3)| < \varepsilon,$$

kun $0 < |h - 0| < \delta_\varepsilon$.

Näinollen raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{h\to 0}(f(1+h) - f(1))/h = -3.$$

Joten edelleen derivaatan määritelmän nojalla $f'(1) = -3$.

Tehtävä 3 Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita

$$e^{-x^2}\sqrt{\sin^2 x + 7}$$

saa reaaliluujen joukossa on suurin. (Tehtävässä saa käyttää kaikkia sinin ja eksponenttifunktion tuttuja ominaisuuksia.)

Merkitään $f(x) = \exp(-x^2)\sqrt{\sin^2(x) + 7}$. Koska exp- ja sin-funktio ovat jatkuvia R:ssä ja neliöjuuri-funktio on jatkuva $[0, \infty)$:ssa, niin kahden jatkuvan funktion yhdisteen ja summan jatkuvuuden nojalla f on jatkuva R:ssä.

Lisäksi $f(0) = \exp(0)\sqrt{0+7} = \sqrt{7} > 0$ ja $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, sillä

$$\begin{aligned}|f(x) - 0| &= \exp(-x^2)\sqrt{\sin^2(x) + 7} \leq \exp(-x^2)\sqrt{1+7}\\ &\leq \sqrt{9}\exp(-|x|) = 3\exp(-|x|)\end{aligned}$$

Ja jos $\varepsilon > 0$, niin $3\exp(-|x|) < \varepsilon \iff \exp(-|x|) < \varepsilon/3 \iff -|x| < \ln(\varepsilon/3) \iff |x| > -\ln(\varepsilon/3)$.

Valitaan tässä (raja-arvon määritelmässä) $\varepsilon = \frac{f(0)}{2}$ ja merkitään $M = -\ln(\frac{f(0)/2}{3}) = -\ln(\frac{\sqrt{7}}{6}) = -\ln(\sqrt{\frac{7}{36}}) = \ln(\sqrt{\frac{36}{7}})(> 0)$.

Nyt siis $f(x) = |f(x)| < f(0)/2$, kun $x \in R \setminus [-M, M]$.

Toisaalta Weierstrassin min-max-lauseen (s.42) nojalla f:llä on suurin arvo välillä $[-M, M]$. Em. nojalla pätee myös, että

$$\max_{x\in[-M,M]} f(x) \geq f(0) > \frac{f(0)}{2} > f(y)$$

kaikilla $y \in R \setminus [-M, M]$.

Siis kaikilla $y \in R$ on voimassa $\max_{x\in[-M,M]} f(x) \geq f(y)$. Eli tämä ym. suurin arvo välillä $[-M, M]$ on suurin arvo myös R:ssä.

Tehtävä 4 Osoita että kaikilla $x > 0$ pätee

$$\frac{\sin^2 x}{x} \leq 2.$$

(Väite on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\sin^2 x \leq 2x$$

kanssa. Voit tietysti tarkastella kumpaa tahansa muotoa.)

Merkitään $f(x) = 2x - \sin^2(x)$ ja osoitetaan, että $f(x) \geq 0$, kun $x > 0$. Tämä on yhtäpitävää väiteen kanssa.

Koska polynomifunktio ja sin-funktio ovat derivoituvia R:ssä, niin f on derivoituva R:ssä. Lisäksi $f'(x) = 2 - 2\sin(x)\cos(x) = 2(1 - \sin(x)\cos(x))$.

Edelleen koska $\sin(x) \leq 1$ ja $\cos(x) \leq 1$ kaikilla $x \in R$, niin $2(1 - \sin(x)\cos(x)) \geq 2(1-1) = 0$. Lisäksi yhtälöllä $\sin(x) = \cos(x) = 1$ ei ole ratkaisua, joten $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in R$ (erityisesti kun $x > 0$).

Siis Lause 8.6:n (s.57) nojalla f on aidosti kasvava välillä$[0, \infty)$. Lisäksi $f(0) = 0$. Joten $f(x) > 0$, kun $x > 0$.

Näinollen $2x > \sin^2(x)$, kun $x > 0$; eli erityisesti $2x \geq \sin^2(x)$, kun $x > 0$.