Analyysi I
Malliratkaisut (TK)
Ohjaus 8, 10.11.2008 - 12.11.2008

1. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x-2}{x-3} = \infty.$$

Olkoon M jokin reaaliluku. Olisi löydettävä $\delta > 0$, jotta ehdosta $x \in (3, 3+\delta)$ seuraisi $\frac{x-2}{x-3} > M$. Aluksi voidaan olettaa, että $M > 0$, sillä muussa tapauksessa luvuksi δ kelpaisi mikä tahansa positiivinen luku.

Koska $x > 3$, niin $x - 2 > 1$, joten $\frac{x-2}{x-3} > \frac{1}{x-3}$. Jos valitaan $\delta = \frac{1}{M}$, pätee $x < 3 + \frac{1}{M}$, josta saadaan $\frac{1}{x-3} > M$.

2. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että yhtälöllä $e^x = \ln(x + e^2)$ on ainakin yksi positiivinen ratkaisu.

Tarkastellaan funktiota $F(x) = e^x - \ln(x + e^2)$. Logaritmifunktio on määritelty vain kun $x + e^2 > 0$, joten sama pätee myös tälle funktiolle. Tehtävänä on löytää epänegatiiviset luvut a ja b, joilla $F(a)$ ja $F(b)$ saavat erimerkkiset arvot. Koska funktio F on jatkuva koko määrittelyalueessaan, Bolzanon lause takaisi silloin luvun $\xi \in (a, b)$, jolle $F(\xi) = 0$. Tämä ξ olisi silloin etsitty positiivinen ratkaisu.

Tehtävää voi lähestyä valistuneen arvauksen näkökulmasta, eli hahmottelemalla kuvaajat e^x ja $\ln(x + e^2)$, arvaamalla, missä ensimmäinen kuvaaja olisi toisen alapuolella ja missä yläpuolella, ja lopulta tarkistamalla arvaukset laskemalla. Arvaukset voi kaivaa myös hatusta.

Huomataan aluksi, että

$$F(0) = e^0 - \ln(0 + e^2) = 1 - 2 = -1 < 0.$$

Eräs tapa edetä, olisi arvata, että pisteessä 1 funktion merkki olisi toinen, mutta arvoa $F(1) = e^1 - \ln(1 + e^2)$ on hankala laskea tai arvioida käsin. Sen sijaan voidaan tarkastella funktion arvoa vaikkapa pisteessä $e^6 - e^2$.

Havaitaan aluksi, että koska $2 \le e \le 4$, niin $e^6 - e^2 \ge 2^6 - 4^2 = 48$. Edelleen $e^{e^6 - e^2} \ge 2^{48} > 6$, joten

$$F(e^6 - e^2) = e^{e^6 - e^2} - \ln(e^6 - e^2 + e^2) = e^{e^6 - e^2} - 6 > 2^{48} - 6 > 0.$$

Valitaan siis $a = 0$ ja $b = e^6 - e^2$ joten kuten edellä mainittiin, Bolzanon lauseesta saadaan tehtävän ratkaisu.

3. Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin^2(e^x)}{e^{x^2}},$$

saa on suurin.

Jos funktiota hahmottelee paperille ja tarkastelee sen käyttäytymistä, huomaa, että osoittajan arvot ovat aina välillä $[0, 1]$. Nimittäjän arvot ovat aina positiivisia ja kasvavat rajatta, kun x kasvaa tai pienenee rajatta. Vaikuttaisi siis siltä, että funktiolla on huippukohta jossain luvun 0 tuntumassa.

Sovelletaan Min-max-lausetta, joka sanoo, että jatkuva funktio saavuttaa suljetulla välillä suurimman (ja pienimmän) arvonsa. Funktio f on määritelty koko reaaliakselilla, mutta Min-max-lause puhuu ainoastaan tapauksista, missä tarkastelun kohteena on suljettu väli. Pitäisi siis valita jokin väli, johon tätä lausetta voisi soveltaa, mutta pitää samalla huoli siitä, että funktio ei saa suurempia arvoja tämän välin ulkopuolella.

Havaitaan aluksi, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, sillä jos $x > 0$, pätee $0 \leq \frac{\sin^2(e^x)}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x}$, josta kuristuslauseen erään version mukaan saadaan tämä raja-arvo.

Toisaalta myös $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, sillä jos $x < 0$, pätee $0 \leq \frac{\sin^2(e^x)}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^{x^2}} \leq -\frac{1}{x}$.

Huomataan myös, että $f(0) = \frac{\sin^2(e^0)}{e^{0^2}} = \sin^2(1) > 0$, jossa oletan viimeisen epäyhtälön tunnetuksi "tuttujen ominaisuuksien perusteella". Ei ole väliä sillä, mikä tämä luku tarkalleen ottaen on, tai edes sen desimaalikehitelmän alkua, vaan vain se, että se ei ole 0.

Sovelletaan aluksi ylläolevaa raja-arvoa sille, että x kasvaa rajatta, arvolla $\epsilon = f(0) > 0$. Saadaan sellainen $b > 0$, että kun $x > b$, pätee $f(x) < f(0)$. Soveltamalla funktion raja-arvoa sille, että x vähenee rajatta, saadaan $a < 0$, että kun $x < a$, pätee myöskin $f(x) < f(0)$.

Sovelletaan nyt Min-max-lausetta väliin $[a, b]$. Funktio on määritelty ja jatkuva koko välillä, joten lausetta voidaan soveltaa. Saadaan siis luku $c \in [a, b]$, jossa f saa suurimman arvonsa. Koska 0 kuuluu tälle välille, pitää pateä $f(c) \geq f(0)$, mikä takaa sen, että välin ulkopuolella oleville x pätee $f(c) \geq f(0) > f(x)$.

4. Oletetaan, että f ja g ovat koko reaalilukujen joukossa määriteltyjä jatkuvia funktioita. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, ja $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Onko välttämättä olemassa x, jolle $f(x) = g(x)$?

Kuten tehtävässä 2, tarkastellaan funktiota $F(x) = f(x) - g(x)$ ja pyritään löytämään luvut x_0 ja x_1, joilla funktio F saa erimerkkiset arvot. Soveltamalla Bolzanon lausetta tähän väliin saataisiin haluttu x.

Koska $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, niin soveltamalla määritelmää arvolle $M = 2$ saadaan x_M, niin että kun $x < x_M$, pätee $f(x) > M = 2$. Soveltamalla tiedon $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ perusteella raja-arvon määritelmää luvulle $\epsilon = 1$, saadaan x_ϵ, että kun $x < x_\epsilon$, pätee $g(x) < \epsilon = 1$.

Valitaan jokin luku $x_0 < \min\{x_\epsilon, x_M\}$. Havaitaan, että $F(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 2 - 1 = 1$.

Tehdään sama temppu funktioiden raja-arvoille, kun x kasvaa rajatta, jolloin saadaan luvut x'_M ja x'_ϵ, ja valitsemalla mikä tahansa $x_1 > \max\{x'_\epsilon, x'_M\}$, sille pätee $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) < -1$.

Bolzanon lauseen ehdot ovat siis voimassa välille $[x_0, x_1]$ (myös funktio F on määritelty ja jatkuva kaikilla reaaliluvuilla), joten lauseen antama luku x, jolle $F(x) = 0$, on tehtävän vastaus.