MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1
Ohjaus 4
29. 9. 2008 alkavalle viikolle

1. Selvitä lauseen 4.7 avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n+7}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Muista lauseen "jos, niin" -rakenne! Tehtävässä saa pitää tunnettuna, että $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$.

2. Oletetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

Tämän voi tehdä (ainakin) kahdella tavalla:
1) tarkastellen erikseen tapauksia $a < 0$, $a = 0$ ja $a > 0$; ja
2) kolmioepäyhtälön "vasemman puolen" avulla (- löytyy monisteesta.)

3. Oletetaan, että eräällä luvulla $r > 0$ pätee kaikille n, että $x_n \geq r$. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

(Lisäkysymys jälkeen päin pohdittavaksi: voiko luvusta r luopua?)

4. Osaatko todistaa, että seuraava jono suppenee:

$$1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \ldots?$$

(Tehtävässä on itse asiassa kyse kurssin analyysi II sarjateorian osaan kuuluvasta Leibnizin lauseesta.) Tehtävää voi lähestyä esim. tarkastelemalla ensin jonoja $x_1, x_3, \ldots$ ja $x_2, x_4, \ldots$.