Analyysi I
Ohjaus 3
22.9.-26.9.2008
Malliratkaisut (Jussi Martin)

1. Osoita väite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}=1$$

todeksi.

Ratkaisu:

Olkoon $\varepsilon>0$ mielivaltainen, tutkitaan millä arvoilla $n\in\mathbb{N}$ epäyhtälö

$$\left|\frac{n+3}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

toteutuu. Nyt

$$\left|\frac{n+3}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n+3-(n+1)}{n+1}\right|=\frac{2}{n+1}$$

ja

$$\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}<\varepsilon,\quad \text{kun} \quad n>\frac{2}{\varepsilon}.$$

Toisin sanoen siis

$$\left|\frac{n+3}{n+1}-1\right|<\varepsilon,\quad \text{aina kun} \quad n>\frac{2}{\varepsilon},$$

mikä raja-arvon määritelmän nojalla osoittaa väitteen todeksi, sillä nyt kaikilla $\varepsilon>0$ on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, että

$$\left|\frac{n+3}{n+1}-1\right|<\varepsilon,\quad \text{kun} \quad n>n_\varepsilon.$$

Huomaa, että raja-arvon määritelmän kannalta ei varsinaisesti ole oleellista mikä luvun n_ε arvon on, vaan pikemminkin se että kyseinen luku on olemassa.

2. Osoita väite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}=2$$

epätodeksi.

Ratkaisu:

Jos väite pitäisi paikansa, tulisi jokaisella $\varepsilon>0$ olla olemassa luku n_ε, jolla

$$\left|\frac{n+3}{n+1}-2\right|<\varepsilon,\quad \text{aina kun} \quad n>n_\varepsilon,$$

mutta näin ei voi olla, koska

$$\left|\frac{n+3}{n+1}-2\right|=\left|\frac{n+3-2n-2}{n+1}\right|=\frac{n-1}{n+1}\geq\frac{1}{2},\quad \text{aina kun} \quad n\geq 3.$$

(Tämä nähdään seuraavasti:

$$\frac{n-1}{n+1}\geq\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2(n-1)}{n+1}\geq 1\quad\Leftrightarrow\quad 2(n-1)\geq n+1$$

$$\Leftrightarrow\quad 2n-2\geq n+1\quad\Leftrightarrow\quad 2n-n\geq 1+2\quad\Leftrightarrow\quad n\geq 3.)$$

Selvennys:
Arvoilla $0 < \varepsilon < 1/2$ ei voi olla olemassa raja-arvon määritelmässä haluttua lukua n_ε, koska itseisarvo $\left|\frac{n+3}{n+1} - 2\right|$ on tällöin isompi kuin ε kaikilla $n \geq 3$.

3. Onko olemassa
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})?$$

Ratkaisu:

Nyt
$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$
$$= \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$
ja
$$\frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon, \quad \text{aina kun} \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$
Tästä seuraa, että
$$|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0| < \varepsilon, \quad \text{aina kun} \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$
ja siten raja-arvon määritelmän nojalla raja-arvo on olemassa ja se on 0.

4. Jonosta (x_n) tiedetään vain, että $|x_n| \leq 7$ kaikilla n. Määritellään toinen jono (y_n) yhtälöllä
$$y_n = \frac{1}{n}x_n.$$
Pitääkö välttämättä paikkansa, että
$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0?$$

Ratkaisu:

Nyt
$$|y_n - 0| = |\frac{1}{n}x_n - 0| = \frac{1}{n}|x_n| \leq \frac{7}{n} < \varepsilon, \quad \text{kun} \quad n > \frac{7}{\varepsilon}$$
eli raja-arvon määritelmän nojalla $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.