MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 11
1. 12. 2008 alkavalle viikolle

Luennoilla on nyt menossa vaihe, missä Hurri-Syrjäsen monistetta käyttäen tutustutaan tärkeiden transkendenttifunktioiden perusominaisuuksiin.

1. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $e^x \geq 1 + x$. Tutki erotusta. Väliarvolause auttaa.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = e^x - x - 1$, $x \geq 0$. f on jatkuva ja derivoituva joukossa $[0, \infty[$. Meidän pitää osoittaa että $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 0$. Jos $x = 0$, saamme

$$f(x) = f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0 \geq 0.$$

Jos taas $x > 0$ tarkastelemme funktiota välillä $[0, x]$. Se on jatkuva ja derivoituva tällä välillä, joten väliarvolauseen mukaan on olemassa $\xi \in]0, x[$ niin, että

$$f(x) - f(0) = f(x) = f'(\xi)(x - 0) = f'(\xi)x.$$

Toisaalta osaamme derivoida funktion f:

$$f'(x) = e^x - 1,$$

joka on > 0, kun $x > 0$. Erityisesti $0 < \xi < x$, joten $f'(\xi) > 0$. Kahden positiivisen luvun tulo on positiivinen, joten lopulta

$$f(x) = xf'(\xi) > 0, \ x > 0.$$

Kaiken kaikkiaan siis $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 0$.

2. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. (Voiko tehtävien 1 ja 2 ideaa jatkaa eteenpäin?)

Ratkaisu: Ratkaisun idea on sama kuin edellisessä tehtävässä. Merkitään taas

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1, \ x \geq 0.$$

Tämä on jatkuva ja derivoituva joukossa $[0,\infty[$, sekä $f(0)=0$. Jos $x>0$, funktio on jatkuva ja derivoituva välillä $[0,x]$, ja on siis olemassa $\xi\in]0,x[$, jolla

$$f(x)-f(0)=f(x)=f'(\xi)x.$$

Toisaalta kaikilla x, $f'(x)=e^x-x-1$, joka on edellisen tehtävän nojalla ei-negatiivinen kun x on ei-negatiivinen. $f(x)$ saadaan taas kahden ei-negatiivisen luvun $f'(\xi)$, ja x tulona, joten $f(x)\geq 0$, kun $x\geq 0$. Lisäkysymystä käsitellään näiden malliratkaisujen lopussa liitteenomaisesti.

3. Johda yhtälö

$$D\mathrm{ar}\cosh x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

kun $x>1$. Tutki monisteen sivuja 84 ja 85!

*Ratkaisu:*Merkitään $f(x)=\cosh x$, $x>0$. Silloin $f'(x)=\sinh x>0$, kun $x>0$. Lisäksi $f]0,\infty[=]1,\infty[$. Funktio $f:]0,\infty[\to]1,\infty[$ määrittelee siten jatkuvan ja derivoituvan käänteiskuvauksen $g:]1,\infty[\to]0,\infty[$ ("$g=\mathrm{ar}\cosh$"). Käänteisfunktion derivoimissäännön nojalla, jos $y\in]1,\infty[$ on mielivaltainen

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\sinh x},$$

missä $x>0$ on sellainen luku, että $y=\cosh x$. Haluamme ilmaista oikeanpuoleisen lausekkeen y:n avulla. Tämän voi tehdä ratkaisemalla x yhtälöstä $y=\cosh x$ ja sijoittamalla se haluttuun lausekkeeseen. Koska kuitenkin tiedämme jo, minkä lopputuloksen haluamme, on helpompaa (vähemmän työlästä) edetä ikään kuin lopusta alkuun. Tätä varten merkitään $t=e^x>0$. Silloin

$$y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{t+t^{-1}}{2}.$$

Lasketaan

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2-1} &= \sqrt{\frac{(t+t^{-1})^2}{4}-1}=\frac{\sqrt{(t+t^{-1})^2-4}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{t^2+2+t^{-2}-4}}{2}=\frac{\sqrt{t^2-2+t^{-2}}}{2}=\frac{\sqrt{(t-t^{-1})^2}}{2}\\ &= \left|\frac{t-t^{-1}}{2}\right|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right|=|\sinh x|.\end{aligned}$$

Toisaalta, koska $x > 0$, on myös $\sinh x > 0$, ja saamme siis

$$\frac{1}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{|\sinh x|} = \frac{1}{\sinh x} = g'(y).$$

Tämä on haluttu derivointikaava mielivaltaiselle pisteelle $y > 1$.

Vaihtoehtoinen (ja lyhyempi) tapa, joka käyttää ar cosh:n kaavaa:

Lauseen 9.24 mukaan $\text{ar}\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ kaikilla $x \geq 1$, joten

$$\begin{aligned}
D(\text{ar}\cosh x) &= D(\ln(x+\sqrt{x^2-1})) = \frac{D(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1 + D(x^2-1)(2\sqrt{x^2-1})^{-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2\sqrt{x^2-1} + D(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})} \\
&= \frac{2(x+\sqrt{x^2-1})}{2\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.
\end{aligned}$$

4. Osoita, että x^x on aidosti kasvava joukossa $[\frac{1}{e}, \infty[$.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = x^x$, $x > 0$. Silloin

$$Df(x) = D(x^x) = D(e^{x \log x}) = D(x \log x) \cdot e^{x \log x} = (1 + \log x)x^x.$$

Tästä näemme, että $f'(x) > 0$, kun $(1 + \log x)x^x > 0$, eli

$$(1 + \log x)x^x > 0 \Leftrightarrow 1 + \log x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}.$$

Olkoot nyt $x, y \in [e^{-1}, \infty[$, $x < y$. Meidän pitää näyttää, että $f(y) - f(x) > 0$. Tätä varten tarkastellaan funktiota välillä $[x, y] \subset [e^{-1}, \infty[$. f on jatkuva ja derivoituva tällä välillä, joten löytyy ξ, $e^{-1} \leq x < \xi < y < \infty$, jolla

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) > 0.$$

5. Tarkastellaan funktiota $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ missä $f(x) = e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x)$. Selvitä sen lokaalit ääriarvot. Mitä tapahtuu funktiolle kun $x \to \infty$?

Ratkaisu: Selvitetään ensin lokaalit ääriarvot. Koska tehtävän funktio on kaikkialla derivoituva, ne löytyvät derivaatan nollakohdista. Tämä johtuu siitä, että jos jossakin pisteessä funktion derivaatta eroaa nollasta, se ei voi olla lokaali ääriarvokohta (Lemma 8.1 monisteessa). Derivoimalla saamme

$$f'(x) = e^{-2x}(\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) - 2\sin(\sqrt{3}x)),$$

ja

$$f''(x) = e^{-2x}(\sin(\sqrt{3}x) - 4\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)).$$

Silloin $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) - 2\sin(\sqrt{3}x) = 0 \Leftrightarrow \tan(\sqrt{3}x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\text{ arc tan }(\frac{\sqrt{3}}{2}) + n\pi) =: \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha + n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$. Mahdolliset lokaalit ääriarvot ovat siis $y_n = f(x_n) = e^{-2x_n}\sin(\sqrt{3}x_n)$. Näitä lukuja ei yleisesti pystytä ilmoittamaan suljetussa muodossa, eli niiden arvo voidaan ilmoittaa vain likiarvona. (Kuitenkin voidaan todeta, että $0 < \alpha := \text{ arc tan }(\frac{\sqrt{3}}{2}) < \pi/2$.) Meidän pitää vielä todistaa, että jokainen x_n, $n \in \mathbb{N}$, on lokaali ääriarvo. Tätä varten haluamme käyttää f''-testiä (Lause 8.10, s. 58 monisteessa), jonka mukaan riittää todeta, että $f''(x_n) \neq 0$ derivaatan nollakohtapisteissä x_n, $n \in \mathbb{N}$. Tällöin 8.10:n mukaan kyseessä on joko lokaali minimi (jos $f''(x_n) > 0$) tai maksimi (jos $f''(x_n) < 0$).

Jakamalla identiteetti $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ puolittain $\cos^2\alpha$:lla, saadaan

$$\cos^{-2}\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + 3/4.$$

Tästä voidaan ratkaista $\cos\alpha$, ja kun se on tunnettu, $\sin\alpha$ (huomaa, että sekä $\sin\alpha$ että $\cos\alpha$ ovat positiivisia, koska $0 < \alpha < \pi/2$. Saadaan

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{7}},\ \sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}},$$

joista vielä sinin ja kosinin summakaavojen avulla

$$\cos(\alpha + n\pi) = \cos\alpha\cos n\pi - \sin\alpha\sin n\pi = (-1)^n\frac{2}{\sqrt{7}}$$
$$\sin(\alpha + n\pi) = \sin\alpha\cos n\pi + \cos\alpha\sin n\pi = (-1)^n\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Näiden kaavojen avulla voidaan laskea $f''(x_n)$:

$$\begin{aligned} f''(x_n) &= e^{-2x_n}(\sin(\sqrt{3}x_n) - 4\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x_n)) \\ &= e^{-2x_n}(\sin(\alpha + n\pi) - 4\sqrt{3}\cos(\alpha + n\pi) \\ &= e^{-2x_n}(-1)^n \left(\sqrt{\frac{3}{7}} - 4\sqrt{3}\frac{2}{\sqrt{7}} \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Mitä tulee funktion raja-arvoon äärettömyydessä, on helppo arvata, että tekijä e^{-2x} painaa sen nollaan. Todistetaan tämä. Huomaamme aluksi, että $|f(x)| = |e^{-2x}\sin(\sqrt{3}x)| \leq e^{-2x}$. Jos $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen annettu luku, valitaan $M > 0$ niin, että $M > 1/2 \cdot \log(1/\varepsilon)$. Silloin kaikilla $x > M$ pätee

$$|f(x) - 0| \leq e^{-2x} < e^{-2M} < e^{-\log(1/\varepsilon)} = e^{\log\varepsilon} = \varepsilon,$$

eli $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

6. Määritellään $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x^2})$ kun $x \neq 0$ ja $f(0) = 0$. Onko f derivoituva kohdassa $x = 0$? Onko sen derivaattafunktio jatkuva? Entä rajoitettu?

Ratkaisu: Tarkastellaan erotusosamäärän $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ raja-arvoa, kun $h \to 0$:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2\sin(\frac{1}{h^2}) - 0}{h} = h\sin(h^{-2}).$$

Nyt

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - 0 \right| = |h\sin(h^{-2})| \leq |h| \to 0,$$

kun $h \to 0$. Saimme että erotusosamäärällä on raja-arvo
$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = 0$. Toisaalta silloin, kun $x \neq 0$, funktio on derivoituva pisteessä x ja

$$f'(x) = 2x\sin(x^{-2}) - 2x^2x^{-3}\cos(x^{-2}) = 2x\sin(x^{-2}) - \frac{2}{x}\cos(x^{-2}).$$

Olkoon $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, $n \in \mathbb{N}$, niin että $\cos(x_n^{-2}) = 1$, $\sin(x_n^{-2}) = 0$ ja $x_n \to 0$ kun $n \to \infty$. Silloin

$$|f'(x_n)| = 2\sqrt{2\pi n} \to \infty,$$

kun $n \to \infty$. Näin ollen derivaattafunktio ei ole rajoitettu nollan ympäristössä, sillä jokaiselta väliltä $(-h, h)$, $h > 0$, löytyy lukuja x_n joilla f' saa itseisarvoltaan mielivaltaisen suuria arvoja. Tämä tietenkin tarkoittaa myös, että derivaattafunktio ei ole jatkuva origossa, sillä ei päde

$$\lim_{n \to \infty} f'(x_n) = f'(\lim_{n \to \infty} x_n) = f'(0) = 0.$$

Tehtävän 2. lisäkysymys: Samaan tapaan kuin tehtävissä 1 ja 2, voidaan osoittaa, että

$$e^x \geq 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3, \quad e^x \geq 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4, \ldots.$$

Yleisesti, jos kaikilla $x \geq 0$ pätee

$$e^x \geq 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \tfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$$

jollakin $n \geq 1$ (sopimus: $0! = 1$), silloin kaikilla $x \geq 0$ pätee myös

$$e^x \geq 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n,$$

koska

$$D(e^x - (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n)) = e^x - (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \tfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}) \geq 0,$$

jolloin funktio $e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n)$ on kasvava, ja $e^0 - (1 + 0 + \frac{1}{2}0^2 + \cdots + \frac{1}{n!}0^n) = 0$.

Käyttäen induktiota voidaan siis osoittaa, että epäyhtälö

$$e^x \geq 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n := f_n(x)$$

on voimassa kaikilla $x \geq 0$ ja kokonaisluvuilla $n \geq 0$.

Näin olemme saaneet jonon funktioita $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, joille $f_n(x) \leq e^x$. Lisäksi näemme, että

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots$$

kaikilla $x \geq 0$. Jokaisella $x \geq 0$ meillä on siis ylhäältä rajoitettu nouseva jono, joten sillä on raja-arvo, jota merkitsemme

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Haluamme todistaa, että $f(x) = e^x$. Tässä on hyödyksi seuraava tieto:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

joka on suora seuraus siitä, että $e = \lim\limits_{y\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^y$ (vastaavanlainen tulos on monisteen sivulla 82, lause 9.23). Tiedämme että

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{\overbrace{n \cdot n \cdots n}^{k}}{k!} = \frac{n^k}{k!},$$

kun $n, k \in \mathbb{N}$ ja $k \leq n$. Edelleen binomikaavan avulla voimme arvioida

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = f_n(x) \leq e^x.$$

Antamalla $n \to \infty$ kuristuslause antaa:

$$e^x \leq f(x) \leq e^x,$$

joten olemme todistaneet $e^x = f(x)$. $\square$