

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Harjoitus 8

10. 11. 2008 alkavalle viikolle

1. Osoita funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla, että

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$$

on jatkuva koko \mathbb{R} :ssä.

2. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^{2001} + x^{2009}$. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $x \in]0, 1[$, jolle pätee $f(x) = 1$. Huolellinen perustelu!

3. Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Osoita, että $f(x) \rightarrow -\infty$ kun $x \rightarrow -\infty$ ja $f(x) \rightarrow \infty$ kun $x \rightarrow \infty$. Osoita näiden havaintojen avulla, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 7777$.

4. Olkoon f tehtävän 2 funktio. Määritellään

$$g(x) = \frac{1}{f(x)^2 + 1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita funktio g saa on suurin.

5. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja aidosti kasvava välillä $]0, 1[$. Onko f välttämättä aidosti kasvava koko välillä $[0, 1]$?

6. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva. Oletetaan, että $f(1) < f(2)$ ja $f(4) < f(3)$. Osoita, että on olemassa kaksi eri reaalilukua x ja y , joilla $f(x) = f(y)$.