MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 6, ratkaisut (MV)
27. 10. 2008 alkavalle viikolle

1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

on tosi.

Ratkaisu. Havaitaan, että

$$(1) \qquad \left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{4}{7}\right| = \left|\frac{7(x+1)-4(2x+1)}{7(2x+1)}\right| = \frac{1}{7|2x+1|}|x-3| < |x-3|,$$

jos $7|2x+1| > 1$. Jälkimmäinen epäyhtälö toteutuu esim. silloin, kun $|x-3| < 1$, sillä tällöin $x-3 > -1$ eli $x > 2$.
Jos siis $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, valitaan $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$. Tällöin ehdosta $|x-3| < \delta$ seuraa, että $|x-3| < 1$ ja edelleen että epäyhtälö (1) on voimassa. Näin ollen

$$\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{4}{7}\right| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } |x-3| < \delta,$$

joten väite pätee funktion raja-arvon määritelmän nojalla.

2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{5}{7}$$

on epätosi.

Ratkaisu. Tarkastellaan sellaisia reaalilukuja x, joilla $x > 1$. Tällaisilla x pätee $3(3x-2) = 2x + (7x-6) > 2x+1 > 0$, joten

$$(2) \quad \left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{5}{7}\right| = \left|\frac{7(x+1)-5(2x+1)}{7(2x+1)}\right| = \frac{|3x-2|}{7|2x+1|} = \frac{3(3x-2)}{7\cdot 3(2x+1)} > \frac{1}{21}.$$

Tämä havainto osoittautuu hyödylliseksi, sillä nyt halutaan löytää sellainen $\varepsilon > 0$, että millään $\delta > 0$ ei ehdoista $|x-3| < \delta$ ja $x \neq 3$ seuraa $\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{5}{7}\right| < \varepsilon$. Voidaan nimittäin valita $\varepsilon = \frac{1}{21}$, jolloin jokaista lukua $\delta > 0$ kohti löytyy sellainen $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$, että $|x-3| < \min\{1, \delta\}$. Tällöin $|x-3| < 1$, joten itseisarvolemman nojalla $x > 1$ ja siten epäyhtälö (2) pätee eli

$$\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{5}{7}\right| > \varepsilon.$$

Lisäksi $|x-3|<\delta$, joten luku $\frac{5}{7}$ ei täytä tehtävänannon funktion raja-arvon ehtoja. Siis ei päde

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{5}{7}.$$

3. Määritellään funkto $f:]0,3[\to\mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}.$$

Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio f on derivoituva kohdassa $x=2$ ja että $f'(2)=\frac{2}{9}$.

Ratkaisu. On siis osoitettava, että jokaista $\varepsilon>0$ kohti on olemassa sellainen $\delta>0$ että

$$\left|\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\frac{2}{9}\right|<\varepsilon \quad \text{aina, kun } |x-2|<\delta,\ x\neq 2. \tag{3}$$

Koska kaikilla $x\neq 2$ pätee

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{1}{x-2}\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{2-1}{2+1}\right)=\frac{1}{x-2}\frac{2(x-2)}{3(x+1)}=\frac{2}{3(x+1)},$$

niin

$$\left|\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\frac{2}{9}\right|=\left|\frac{2\cdot 3-2\cdot(x+1)}{9(x+1)}\right|=\frac{2}{9|x+1|}|x-2|<|x-2|, \tag{4}$$

kun $x\neq 2$ ja $9|x+1|>2$. Jälkimmäinen epäyhtälö toteutuu esim. silloin, kun $|x-2|<1$.
Valitaan $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$, jolloin kaikilla $x\neq 2$ s.e. $|x-2|<\delta$ epäyhtälö (4) pätee ja $|x-2|<\varepsilon$. Näin ollen on löydetty δ s.e. (3) pätee. Funktio f on siis derivoituva pisteessä 2 ja

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{2}{9}.$$

4. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio $f(x)=\sqrt{x}$ on derivoituva kohdassa $x=4$ ja että $f'(4)=1/4$.

Ratkaisu. Jos $f'(4)$ on olemassa, niin derivaatan määritelmän mukaan

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}.$$

Toisaalta

$$\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}=\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}=\frac{1}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}},$$

joten riittää osoittaa, että funktiolla $\frac{1}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}}$ on raja-arvo $1/4$ kohdassa $h = 0$. Olkoon siis $\varepsilon > 0$ ja asetetaan $\delta = \min\{4, \varepsilon\}$. Tällöin ehdosta $|h| = |h - 0| < \delta$ seuraa $h > -4$, jolloin $4 + h > 0$ ja $\sqrt{4+h}$ on määritelty, ja saadaan

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}} - \frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{4-\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{4(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}\right| = \left|\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{4(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}\right| \\ &= \left|\frac{h}{4(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})^2}\right| < |h| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Viimeisessä epäyhtälössä on käytetty tietoa, että $\sqrt{4+h} \geq 0$, jolloin

$$\frac{1}{|4(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})^2|} \leq \frac{1}{4 \cdot 2^2} < 1. \tag{5}$$

Funktio f on näin ollen derivoituva kohdassa $x = 4$ ja $f'(4) = 1/4$.
Huom. Tarkasti ottaen $\sqrt{4+h}$ olisi määritelty joka tapauksessa, mutta jos $4 + h < 0$, niin $\sqrt{4+h}$ olisi imaginaarinen eikä siis reaaliluku. Kohdassa (5) esitetyt arviot pätisivät myös tässä tapauksessa ($|(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})^2| \geq 2^2$ pätee aina), mutta kompleksilukuja ei käsitellä tällä kurssilla.

5. Oletetaan, että $h > 0$ ja funktio f on määritelty kaikilla $x \in]x_0 - h, x_0 + h[$ ja että $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, missä $b \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \neq x_0$ pätee: jos $|x - x_0| < \delta$, niin $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$. Vihje: voi auttaa, jos tarkastelet tapauksia $b < 0$ ja $b > 0$ erikseen.

Ratkaisu. Itseisarvolemman avulla nähdään, että

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}|b| < |f(x)| < \tfrac{3}{2}|b| &\iff -\tfrac{1}{2}|b| < |f(x)| - |b| < \tfrac{1}{2}|b| \\ &\iff \big||f(x)| - |b|\big| < \tfrac{1}{2}|b|.\end{aligned} \tag{6}$$

Itseisarvofunktiolla $x \mapsto |x|$ on sellainen ominaisuus, että $\big||x| - |y|\big| = |x - y|$, kun $x, y \in \mathbb{R}$ ovat samanmerkkiset. Tämä seuraa suoraan, kun $x, y \geq 0$. Kun $x, y \leq 0$, niin $\big||x| - |y|\big| = |(-x) - (-y)| = |-(x - y)| = |x - y|$. Käyttäen tätä havaintoa sekä kohtaa (6), nähdään että riittää etsiä $\varepsilon > 0$, jolla $\varepsilon \leq \frac{1}{2}|b|$ ja ehdosta $|f(x) - b| < \varepsilon$ seuraa, että $f(x)$ ja b ovat samanmerkkiset. Tällöin on nimittäin olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \neq x_0$ pätee: Jos $|x - x_0| < \delta$, niin $\big||f(x)| - |b|\big| = |f(x) - b| < \varepsilon \leq \frac{1}{2}|b|$.
On intuitiivisesti selvää, että voidaan valita $\varepsilon = \frac{1}{2}|b|$, sillä jos $f(x)$ olisi erimerkkinen kuin b, niin sen etäisyys luvusta b olisi suurempi kuin b:n etäisyys nollasta, jolloin pätisi $|f(x) - b| > |b - 0| > \frac{1}{2}|b|$. Täsmällisesti: Jos $f(x) > 0 > b$, niin $|f(x) - b| = f(x) - b > -b = |b|$. Ja jos $b > 0 > f(x)$, niin $|f(x) - b| = b - f(x) > b = |b|$. Lukujen $f(x)$ ja b on siis pakko olla molempien samanaikaisesti positiivisia tai samanaikaisesti negatiivisia, jos $|f(x) - b| < \frac{1}{2}|b|$.

6. Oletetaan, että funktio g toteuttaa kaikilla $x \in]-1, 1[$ epäyhtälön $|g(x)| < 7$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituvaa kohdassa $x = 0$ ja, että $f'(0) = 0$. Tutki rohkeasti erotusosamäärän etäisyyttä luvusta 0.

(Huomaa, että voi esimerkiksi olla $g(x) = 0$ kun x on rationaalinen ja $g(x) = 1$ kun x on irrationaalinen. Funktio voi olla siis derivoituva yhdessä kohdassa ja epäjatkuva kaikkialla muualla.)

Ratkaisu. Havaitaan, että

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 g(x)}{x}\right| = |x||g(x)| < 7|x|, \tag{7}$$

kun $|x-0| < 1$ (eli $x \in\,]-1,1[$) ja $x \neq 0$. Jos $\varepsilon > 0$, niin valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$. Tällöin ehdoista $x \neq 0$ ja $|x-0| < \delta$ seuraa, että (7) pätee ja $7|x| < \varepsilon$, joten

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \neq 0,\ |x-0| < \delta.$$

Näin ollen f on derivoituva nollassa ja

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$