

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Harjoitus 6

27. 10. 2008 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa jatketaan työskentelyä funktioiden raja-arvojen kanssa. Funktion jatkuvuus ja derivoituvuus ovat heti alusta asti esimerkkeinä raja-arvoista.

1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

on tosi.

2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{5}{7}$$

on epätosi.

3. Määritellään funktio  $f : ]0, 3[ \rightarrow \mathbb{R}$  ehdolla

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio  $f$  on derivoituva kohdassa  $x = 2$  ja että  $f'(2) = \frac{2}{9}$ .

4. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio  $f(x) = \sqrt{x}$  on derivoituva kohdassa  $x = 4$  ja että  $f'(4) = 1/4$ .

5. Oletetaan, että  $h > 0$  ja funktio  $f$  on määritelty kaikilla  $x \in ]x_0 - h, x_0 + h[$  ja että  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ , missä  $b \neq 0$ . Osoita, että on olemassa sellainen  $\delta > 0$ , että kaikilla  $x \neq x_0$  pätee: jos  $|x - x_0| < \delta$ , niin  $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$ . Vihje: voi auttaa, jos tarkastelet tapauksia  $b < 0$  ja  $b > 0$  erikseen.

6. Oletetaan, että funktio  $g$  toteuttaa kaikilla  $x \in ]-1, 1[$  epäyhtälön  $|g(x)| < 7$ . Osoita, että funktio  $f(x) = x^2 g(x)$  on derivoituva kohdassa  $x = 0$  ja, että  $f'(0) = 0$ . Tutki rohkeasti erotusosamäärän etäisyyttä luvusta 0.

(Huomaa, että voi esimerkiksi olla  $g(x) = 0$  kun  $x$  on rationaalinen ja  $g(x) = 1$  kun  $x$  on irrationaalinen. Funktio voi olla siis derivoituva yhdessä kohdassa ja epäjatkuva kaikkialla muualla.)