MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 5, ratkaisut (AV)
6. 10. 2008 alkavalle viikolle

1. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \infty.$$

Ratkaisu. Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Tällöin pätee $n^2 \leq n^2+1$ ja $n+1 \leq n+n = 2n$. Arvioimalla näiden avulla sekä osoittajaa että nimittäjää saadaan

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \tag{1}$$

Olkoon sitten $M \in \mathbf{R}$ ja valitaan indeksi $n_M \geq 2M$. Soveltamalla arviota (1) nähdään, että

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n}{2} > \frac{n_M}{2} \geq M$$

aina kun $n > n_M$. Määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \infty$$

mikä oli osoitettava.

2. (a) Osoita, että

$$\frac{2^{2p}}{2p} \geq \frac{(1+p)^2}{2p}.$$

(b) Osoita, että

$$\frac{2^{2p+1}}{2p+1} \geq 2\frac{(1+p)^2}{2p+1}.$$

(c) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$

Ratkaisu. Kohdissa (a) ja (b) oletetaan, että $p \in \mathbf{N}$.

(a) Sovelletaan Bernoullin epäyhtälöä:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

joka on voimassa kaikilla $x > -1$ ja $n \in \mathbf{N}$. Sijoittamalla tähän epäyhtälöön arvot $x = 1 > -1$ ja $n = p$ päädytään arvioon

$$2^p = (1+1)^p \geq 1+p > 0. \tag{2}$$

Soveltamalla arviota (2) kahdesti nähdään, että

$$2^{2p} = (2^p)^2 \geq 2^p(1+p) \geq (1+p)^2. \tag{3}$$

Etsitty arvio seuraa nyt jakamalla (3) puolittain luvulla $2p > 0$.

(b) Kertomalla epäyhtälö (3) puolittain luvulla 2 saadaan

$$2^{2p+1} = 2 \cdot 2^{2p} \geq 2(1+p)^2. \tag{4}$$

Etsitty arvio seuraa nyt jakamalla (4) puolittain luvulla $2p + 1 > 0$.

(c) Strategia on soveltaa arvioita kohdissa (a) ja (b). Näiden avulla jonon $(2^n/n)$ rajatta kasvaminen on nyt mahdollista osoittaa. Tätä varten aloitetaan tapaustarkastelulla luvun $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ parillisuuden suhteen.

Oletetaan, että n on parillinen. Tällöin $n = 2p$, missä $p = n/2 \in \mathbf{N}$. Soveltamalla arviota kohdassa (a) saadaan

$$\frac{2^n}{n} = \frac{2^{2p}}{2p} \geq \frac{(1+p)^2}{2p} = \frac{(1+n/2)^2}{n} \geq \frac{n^2}{4n} = \frac{n}{4}. \tag{5}$$

Oletetaan, että n on pariton. Tällöin $n = 2p + 1$, missä $p = (n-1)/2 \in \mathbf{N}$. Soveltamalla kohtaa (b) sekä arviota $0 < n < 2p + 2$, saadaan

$$\frac{2^n}{n} = \frac{2^{2p+1}}{2p+1} \geq \frac{2(1+p)^2}{2p+1} = \frac{(2+2p)^2}{2(2p+1)} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \geq \frac{n}{4}. \tag{6}$$

Tapaustarkastelu on valmis.

Yhdistämällä (5) ja (6) (sekä arvio $2^1/1 = 2 > 1/4$ jos $n = 1$) päädytään epäyhtälöön

$$\frac{2^n}{n} \geq \frac{n}{4} \tag{7}$$

joka pätee siis kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Olkoon sitten M reaaliluku ja valitaan indeksi $n_M \geq 4M$. Soveltamalla nyt arviota (7) saadaan

$$\frac{2^n}{n} \geq \frac{n}{4} > \frac{n_M}{4} \geq M$$

kunhan $n > n_M$. Tästä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} 2^n/n = \infty$.

Lisätieto: kohta (c) voidaan osoittaa myös koulusta tutun binomikaavan avulla. Olkoon nimittäin $n \geq 2$, jolloin

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tästä seuraa arvio

$$\frac{2^n}{n} \geq \frac{n(n-1)}{2n}$$

jossa alaraja kasvaa rajatta kun $n \to \infty$ ja siispä myös $\lim_{n\to\infty} 2^n/n = \infty$.

3. Selvitä luvun e määritelmän avulla

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n.$$

Ratkaisu. Osoitetaan aluksi seuraava aputulos:

Aputulos ($\star$): olkoon (x_n) lukujono siten, että $x_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$ ja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0.$$

Tällöin $\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

Aputuloksen todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\delta = \varepsilon\sqrt{a} > 0$. Oletuksen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ nojalla on olemassa indeksi n_δ siten, että $|x_n - a| < \delta$ kun $n > n_\delta$. Erityisesti tästä nähdään, että

$$|\sqrt{x_n}+\sqrt{a}||\sqrt{x_n}-\sqrt{a}| = |(\sqrt{x_n}+\sqrt{a})(\sqrt{x_n}-\sqrt{a})| = |x_n - a| < \delta$$

kun $n > n_\delta$. Jakamalla tämä puolittain tekijällä $|\sqrt{x_n}+\sqrt{a}| \geq \sqrt{a} > 0$ saadaan arvio

$$|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}| < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

joka pätee kaikilla $n > n_\delta$. On osoitettu, että $\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

Siirrytään sitten varsinaisen tehtävän käsittelyyn. Merkitään kaikilla $n \in \mathbf{N}$

$$y_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 0$$

jolloin $\lim_{n\to\infty} y_n = e$. Tällöin myös osajono (y_{2n}) suppenee ja sillä on sama raja-arvo $\lim_{n\to\infty} y_{2n} = e > 0$. Lisäksi osajonon jäsenet toteuttavat yhtälön

$$\sqrt{y_{2n}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

ja tällä perusteella riittää etsiä jonon $(\sqrt{y_{2n}})$ raja-arvo. Tätä varten sovelletaan aputulosta ($\star$) jonoon (y_{2n}) ja näin saadaan identiteetti

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{y_{2n}} = \sqrt{e}.$$

Johtopäätös: *etsittävä raja-arvo on* $\sqrt{e}$.

4. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9.$$

Ratkaisu. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\delta = \min\{1, \varepsilon/8\} > 0$. Oletetaan, että $x \in \mathbf{R}$ toteuttaa epäyhtälön $0 < |x-3| < \delta$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x+3| = |x-3+6| \leq |x-3| + 6 < \delta + 6 \leq 1 + 6 = 7.$$

Soveltamalla tätä arviota ja luvun δ määritelmää nähdään, että

$$|x^2 - 9| = |(x+3)(x-3)| = |x+3||x-3| < |x+3|\delta < 7\delta \leq 7\varepsilon/8 < \varepsilon.$$

On osoitettu, että $|x^2 - 9| < \varepsilon$ aina kun $0 < |x-3| < \delta$. Funktion raja-arvon määritelmän nojalla $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

5. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9} = \frac{1}{6}.$$

Tulkitse tulos derivaattana.

Ratkaisu. Havaitaan aluksi, että $\sqrt{9} = 3$ ja siksi kaikilla $x \in (0, \infty) \setminus \{9\}$ pätee

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9} - \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{(\sqrt{x} + \sqrt{9})(\sqrt{x} - \sqrt{9})} - \frac{1}{6} = \frac{-\sqrt{x} + \sqrt{9}}{6(\sqrt{x} + \sqrt{9})}. \tag{8}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\delta = \min\{9, \varepsilon\}$. Oletetaan, että $x \in \mathbf{R}$ toteuttaa epäyhtälön $0 < |x-9| < \delta$. Tällöin $x \in (0, \infty) \setminus \{9\}$ ja $|\sqrt{x} + \sqrt{9}| = \sqrt{x} + \sqrt{9} > 1$; siispä

$$|\sqrt{x} - \sqrt{9}| \leq |\sqrt{x} + \sqrt{9}||\sqrt{x} - \sqrt{9}| = |(\sqrt{x} + \sqrt{9})(\sqrt{x} - \sqrt{9})| = |x - 9| < \delta.$$

Soveltamalla identiteettiä (8) ja oheisia arvioita saadaan

$$\left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9} - \frac{1}{6} \right| = \frac{|(-1)||\sqrt{x} - \sqrt{9}|}{6|\sqrt{x} + \sqrt{9}|} \leq |\sqrt{x} - \sqrt{9}| < \delta \leq \varepsilon.$$

Funktion raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9} = \frac{1}{6}$$

mikä oli osoitettava.

Tulkinta derivaattana: ylläoleva lasku osoittaa, että funktion $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, derivaatta on olemassa kohdassa $x = 9$ ja sen arvo on $f'(9) = 1/6$. Vastaus saavutetaan myös soveltamalla koulusta tuttua derivoimissääntöä

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

Tähän sääntöön palattaneen vielä kurssin kuluessa.

6. Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a$, kun $n \to \infty$, missä $a \geq 7$. Osoita, että $x_n y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Vihje: $y_n > 6$ kun n on kyllin suuri. Lisäkysymys: entä jos $a = 0$?

Ratkaisu. Osoitetaan, että $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$ ja olkoon tätä varten $M \in \mathbf{R}$. Strategia on etsiä indeksi josta eteenpäin jonojen (x_n) ja (y_n) jäseniä voidaan kontrolloida siten, että $x_n y_n > M$. Edetään vihjeen viitoittamalla polulla ja sitä varten konkretisoidaan aluksi siihen liittyvä arvio:

($\star\star$) Koska $\lim_{n\to\infty} y_n = a$, niin on olemassa indeksi n_ε siten, että

$$\varepsilon := 1 > |y_n - a|$$

kun $n > n_\varepsilon$. Itseisarvon määritelmän nojalla kaikilla $n > n_\varepsilon$ pätee

$$-1 < y_n - a < 1.$$

Soveltamalla lisäksi oletusta $a \geq 7$ nähdään, että $6 = -1+7 \leq -1+a < y_n$ kunhan $n > n_\varepsilon$. On osoitettu, että $y_n > 6$ kunhan $n > n_\varepsilon$.

Arvion ($\star\star$) nojalla on olemassa indeksi n_ε siten, että

$$y_n > 6 \tag{9}$$

kunhan $n > n_\varepsilon$. Hyödynnetään seuraavaksi jonosta (x_n) tehtyä oletusta. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, niin on olemassa indeksi n_M siten, että

$$x_n > M/6 \tag{10}$$

kunhan $n > n_M$. Oletetaan, että $n > \max\{n_M, n_\varepsilon\}$. Molemmat epäyhtälöt (10) ja (9) ovat tällöin voimassa ja niitä soveltamalla päädytään arvioon

$$x_n y_n > 6x_n > \frac{6M}{6} = M.$$

On osoitettu, että $x_n y_n > M$ kunhan $n > \max\{n_M, n_\varepsilon\}$. Määritelmän nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$, eli jono $(x_n y_n)$ kasvaa rajatta.

Tapauksessa $a = 0$ vastaava tulos ei ole voimassa. Toisin sanoen, oletuksista $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ ei voida tehdä sitä johtopäätöstä, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \infty.$$

Osoitetaan tämä vastaesimerkin avulla. Olkoon $x_n = n$ ja $y_n = 1/n$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Kuitenkin pätee

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq \infty.$$