

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Harjoitus 5

6. 10. 2008 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa jatketaan työskentelyä lukujonojen kanssa ja siirrytään opiskelemaan funktion raja-arvoja. Huomaa, että jatkuvuus ja derivoituvuus ovat esimerkkejä tiettyjen raja-arvojen olemassa-olosta.

1. Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1} = \infty.$$

2. (a) Osoita, että

$$\frac{2^{2p}}{2p} \geq \frac{(1+p)^2}{2p}.$$

(b) Osoita, että

$$\frac{2^{2p+1}}{2p+1} \geq 2 \frac{(1+p)^2}{2p+1}.$$

(c) Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$

Vihje: (a) ja (b) kohdista saattaa olla apua, jos aluksi tarkastelet erikseen parillisia ja parittomia n .

3. Selvitä luvun e määritelmän avulla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

4. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9.$$

5. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9} = \frac{1}{6}.$$

Tulkitse tulos derivaattana.

6. Oletetaan, että $x_n \rightarrow \infty$ ja $y_n \rightarrow a$, kun $n \rightarrow \infty$, missä $a \geq 7$. Osoita, että $x_n y_n \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$. Vihje: $y_n > 6$ kun n on kyllin suuri. Lisäkysymys: entä jos $a = 0$?