Analyysi I
Malliratkaisut (TK)
Harjoitus 4

1. Selvitä $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-2)(2n^2-1)}{(n+1)(n^3+3)}$. Huomataan aluksi, että

$$\frac{(n^2-2)(2n^2-1)}{(n+1)(n^3+3)} = \frac{n^2(1-\frac{2}{n^2})n^2(2-\frac{1}{n^2})}{n(1+\frac{1}{n})n^3(1+\frac{3}{n^3})} = \frac{(1-\frac{2}{n^2})(2-\frac{1}{n^2})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^3})}.$$

Saattaisi olla houkuttelevaa ajatella, että termit $\frac{2}{n^2}$ jne. lähestyvät nollaa, jolloin jäljelle jää $\frac{2}{1}$. Tämä ei kuitenkaan todista mitään, vaan todistuksessa pitää lähteä niistä peruspalikoista, mitä tiedetään, ja kasata niistä kokoon haluttu väite. Käytetään lausetta 4.7.

Oletetaan todistetuksi, että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Olkoon $k \geq 1$ jokin luonnollinen luku. Koska $0 < \frac{1}{n^k} < \frac{1}{n}$, kun $k \geq 1$, niin kuristuslauseen mukaan $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$. Tiedetään $\lim_{n\to\infty} a = a$, jos a on jokin vakio. Silloin tuloksesta 4.7(3) (tai tuloksesta 4.7(2)) saadaan $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n^k} = \lim_{n\to\infty} a\frac{1}{n^k} = a \cdot 0 = 0$ kaikilla vakioilla $a \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Käytetään tulosta 4.7(1), jolloin saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n^2}) &= 1-0=1\\
\lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2}) &= 2-0=2\\
\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) &= 1+0=1\\
\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n^3}) &= 1+0=1
\end{aligned}$$

Käytetään tulosta 4.7(3) lukujonojen tulolle termeittäin, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n^2})(2-\frac{1}{n^2}) &= 1\cdot 2=2\\
\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^3}) &= 1\cdot 1=1
\end{aligned}$$

Huomataan, että termeistä $(1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^3})$ muodostetun lukujonon raja-arvo ei ole 0 ja mikään termi ei myöskään ole 0, jolloin voidaan käyttää tulosta 4.7(4) termeittäin jakamiselle, jolloin saadaan yhtälö, joka on myös tehtävän vastaus,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{2}{n^2})(2-\frac{1}{n^2})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^3})} = \frac{2}{1} = 2.$$

2. Määritellään $x_n = \frac{1}{n}\cos n$.

a) Halutaan osoittaa, että lukujonolla on raja-arvo 0. Tarkastellaan siis jonon termien etäisyyttä raja-arvosta 0. Muistetaan aluksi, että $|\cos n| \leq 1$. Silloin saadaan etäisyydelle arvio

$$|x_n - 0| = |\frac{1}{n}\cos n| = \frac{1}{n}|\cos n| \leq \frac{1}{n}.$$

Olkoon $\epsilon > 0$ jokin luku. Huomataan, että jos valitaan $n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$, niin kaikilla $k > n_\epsilon$ on voimassa $\epsilon > \frac{1}{n_\epsilon} > \frac{1}{k}$, joten $|x_k - 0| \leq \frac{1}{k} < \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$, joten tällä n_ϵ vaadittu ehto pätee.

b) Halutaan käyttää kuristuslausetta 4.11. Tarvitaan siis kaksi jonoa, joista toinen on aina suurempi, ja toinen aina pienempi kuin jono x_n, ja joiden raja-arvona on sama luku 0.

Huomataan aluksi, että jonolle (y_n), jossa $y_n = \frac{1}{n}$, pätee $x_n = \frac{1}{n}\cos n \leq \frac{1}{n} \cdot 1 = y_n$ kaikilla n.

Huomataan myös, että jonolle (z_n), jossa $z_n = \frac{-1}{n}$, pätee $x_n = \frac{1}{n}\cos n \geq \frac{1}{n} \cdot -1 = z_n$ kaikilla n.

Toisaalta $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ ja $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ (lause 4.7 vakiolla $a = -1$). Kuristuslauseen mukaan pitää siis päteä myös $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

3. Onko jonolla (x_k) raja-arvoa, kun $x_k = \sqrt{k^2 + k} - \sqrt{k^2}$?

Lavennetaan aluksi lauseketta lausekkeella $\sqrt{k^2 + k} + \sqrt{k^2}$ ja saadaan

$$x_k = \frac{k}{\sqrt{k^2 + k} + \sqrt{k^2}} = \frac{k}{k\sqrt{1 + \frac{1}{k}} + k} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}} + 1}.$$

Näyttäisi siltä, että kun k kasvaa suureksi, niin neliöjuuren sisällä oleva termi $\frac{1}{k}$ lähestyy lukua 0, jolloin neliöjuuri lähestyy lukua 1, ja koko lauseke lukua $\frac{1}{2}$. Tämä pitää kuitenkin todistaa.

Toinen tapa päätyä lukuun $\frac{1}{2}$ on kirjoittaa lauseke seuraavaan muotoon:

$$x_k = k\sqrt{1 + \frac{1}{k}} - k\sqrt{1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k}} - \sqrt{1}}{\frac{1}{k}},$$

mikä on funktion $\sqrt{x}$ derivaatta pisteessä 1, joten raja-arvon pitäisi olla sama kuin tämä derivaatta, eli $\frac{1}{2}$.

Tehtävän voi todistaa ainakin kolmella eri tavalla: käyttämällä lausetta 4.7 ja ohjaustehtävää 3, suoraan raja-arvon määritelmästä, tai muuttamalla termin etäisyys luvusta $\frac{1}{2}$ sellaiseen muotoon, että sitä päästään arvioimaan ylhäältä kaavalla $\frac{1}{k}$. Alla on nämä todistukset.

Muistin virkistykseksi ohjaustehtävä 3: Oletetaan, että eräällä luvulla $r > 0$ pätee kaikille n, että $x_n \geq r$. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Osoita, että $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

Muistetaan aluksi, että $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, joten lauseen 4.7 perusteella $\lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{k}) = 1$.

Havaitaan, että jokainen termi on suurempi kuin 1, joten voidaan käyttää ohjaustehtävää jonolle (y_k), $y_k = 1 + \frac{1}{k}$ ja vakiolle $r = 1$.

Saadaan $\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{k}}=\sqrt{1}=1$.

Edelleen, lauseen 4.7 perusteella saadaan $\lim_{k\to\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1)=1+1=2$, ja koska kaikki termit ovat aidosti positiivisia ja raja-arvo ei ole 0, saadaan jälleen lauseesta 4.7:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Seuraavaksi käytetään suoraan raja-arvon määritelmää, joten aloitetaan kiinnittämällä luku $\epsilon>0$.

Väite: on olemassa sellainen n_ϵ, että kaikilla $k>n_\epsilon$ pätee $|\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2}-\frac{1}{2}|<\epsilon$.

Etsitään siis tällainen n_ϵ. Itseisarvolemman mukaan edellinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälöiden

$$-\epsilon<\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2}-\frac{1}{2}<\epsilon$$

kanssa. Huomataan aluksi, että oikeanpuoleinen epäyhtälö pätee aina, sillä

$$\begin{aligned}
\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2} &< \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow \sqrt{k^2+k} &< \frac{1}{2}+k\\
\Leftrightarrow k^2+k &< \frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}k+k^2\\
\Leftrightarrow 0 &< \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(Toisen ja kolmannen rivin ekvivalenssi pätee, koska epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia).

Valittava n_ϵ riippuu siis ainoastaan vasemmanpuoleisesta epäyhtölästä. Muokataan siis tätä epäyhtälöä parempaan muotoon ekvivalenssi säilyttäen:

$$\begin{aligned}
-\epsilon &< \sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2}-\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow (\frac{1}{2}-\epsilon)+k &< \sqrt{k^2+k}\\
\Leftrightarrow^? (\frac{1}{2}-\epsilon)^2+2(\frac{1}{2}-\epsilon)k+k^2 &< k^2+k\\
\Leftrightarrow (\frac{1}{2}-\epsilon)^2-2\epsilon k &< 0\\
\Leftrightarrow (\frac{1}{2}-\epsilon)^2 &< 2\epsilon k\\
\Leftrightarrow \frac{(\frac{1}{2}-\epsilon)^2}{2\epsilon} &< k
\end{aligned}$$

Huomataan, että toisen ja kolmannen rivin ekvivalenssi ei välttämättä päde, jos ϵ on liian suuri eli jos epäyhtälön vasen puoli on negatiivinen (ja siksi se on merkitty kysymysmerkillä). Vaaditaan siis, että $0<\epsilon<\frac{1}{2}$, jolloin kaikki ekvivalenssit yllä pätevät. Jos väite saadaan osoitettua kaikille tällaisille ϵ, niin todistettavana oleva väite pätee myös kaikilla muillakin $\epsilon > 0$.

Huomataan siis, että aina kun $k > \frac{(\frac{1}{2}-\epsilon)^2}{2\epsilon}$ pätee, niin lukujonon termi x_k on etäisyydellä ϵ luvusta $\frac{1}{2}$. Jos valitaan luvuksi n_ϵ mikä tahansa luku, joka täyttää ym. ehdon k:lle, niin selvästi mikä tahansa $i > n_\epsilon$ täyttää myös tämän ehdon, joten kaikilla $i > n_\epsilon$ pätee $|x_i - \frac{1}{2}| < \epsilon$.

Kolmas vaihtoehtoinen tapa on huomata

$$\sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2} - \frac{1}{2} = \frac{k}{\sqrt{k^2+k}+\sqrt{k^2}} - \frac{1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{k^2+k}+\frac{1}{2}\sqrt{k^2}}{\sqrt{k^2+k}+\sqrt{k^2}} = \frac{-k}{(\sqrt{k^2+k}+\sqrt{k^2})^2},$$

sekä se, että itseisarvoa tarkasteltaessa nimittäjästä voi pudottaa termin $\sqrt{k^2+k}$, jolloin itseisarvon ylärajaksi saadaan $\frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$, jonka raja-arvona on 0.

4. Oletetaan, että (x_n) on laskeva jono, ja (y_n) on nouseva ja kaikilla n pätee $y_n \leq x_n$.

Osoitetaan vihjeen mukaan, että jono (x_n) on alhaalta rajoitettu ja jono (y_n) ylhäältä rajoitettu, eli voidaan käyttää lauseita 4.8 ja 4.9.

Havaitaan välittömästi, että kaikilla n pätee $x_n \leq x_0$ ja $y_n \geq y_0$. (Tarkasti ottaen tämä pitäisi todistaa induktiolla, koska nousevan ja laskevan lukujonon määritelmät sanovat ainoastaan, että lukujonon seuraava termi on edellistä suurempi tai pienempi. Induktio tulee kuitenkin kurssilla vasta myöhemmin.)

- Jono (x_n) on alhaalta rajoitettu, koska kaikilla n pätee $x_n \geq y_n \geq y_0$, joten luku y_0 rajoittaa jonoa (x_n) alhaalta.

- Jono (y_n) on ylhäältä rajoitettu, koska kaikilla n pätee $y_n \leq x_n \leq x_0$, joten luku x_0 rajoittaa jonoa (y_n) ylhäältä.

Lauseista 4.8 ja 4.9 saadaan siis, että lukujonot (x_n) ja (y_n) suppenevat.

5. Väitetään, että on olemassa reaaliluku a, jolle $a = \sup\{x : x^2 < 7\}$.

Merkitään $A = \{x : x^2 < 7\}$.

Havaitaan aluksi, että jos $x \geq 10$, niin $x^2 \geq 100$, joten mikään tällainen luku ei kuulu joukkoon A. Joukko A on siis ylhäältä rajoitettu, ja täydellisyysaksiooman perusteella supremum on olemassa. Havaitaan lisäksi, että luku 0 kuuluu joukkoon A, joten myös supremumin täytyy olla tätä suurempi.

Merkitään supremumia, eli joukon A pienintä ylärajaa, symbolilla a. On siis kolme tapausta. Joko $a^2 = 7$, $a^2 < 7$ tai $a^2 > 7$. Osoitetaan, että kahdessa jälkimmäisessä tapauksessa ajaudutaan ristiriitaan, joten $a^2 = 7$ on ainut mahdollisuus.

Jos $7 < a^2$, niin pitäisi löytää sellainen ”pieni luku” $h > 0$, jolle $7 < (a-h)^2 < a^2$. Lisäksi, koska tehtävässä tavallaan ollaan todistamassa sitä, että neliöjuuri on määritelty kaikille reaaliluvuille, luku h pitäisi laskea yhteen- ja kertolaskun avulla. Yhtälöstä

$$(a-h)^2-7=a^2+h^2-2ah-7,$$

huomataan, että jos pätee $a^2-2ah-7=0$, silloin edelläoleva lauseke on aidosti suurempi kuin 0. Näin on, jos asetetaan $h=\frac{a^2-7}{2a}$.

Nyt pätee, että jos y on mikä tahansa joukon A alkio, $y^2<7<(a-h)^2$, eli alkio $(a-h)$ on yläraja joukon A alkioille. Kuitenkin $a-h<a$, joten a ei ollutkaan jouko A pienin yläraja, mikä on ristiriita.

Jos taas $a^2<7$, pitäisi löytää luku $h>0$, jolle $a^2<(a+h)^2<7$. Nyt kuitenkaan ei saada haluttua tulosta jos valittaisiin $h=\frac{7-a^2}{2a}$ samaan tapaan kuten edellä, sillä h on liian suuri. Huomataan kuitenkin, että $a<7$, jolloin suurentamalla nimittäjää saadaan pienempi $h=\frac{7-a^2}{a+7}$, jolle pätee

$$(a+h)^2-7=(a+\frac{7-a^2}{a+7})^2-7=\cdots=\frac{7\cdot 6(a^2-7)}{(a+7)^2}<0.$$

Saatiin siis luku $a+h$, jolle pätee $a<a+h$, mutta $(a+h)^2<7$, eli luku $a+h$ kuuluu joukkoon A, mutta a on aidosti sitä pienempi, eli se ei ollutkaan joukon A yläraja, mikä on ristiriita.

6. Olkoon $x_1=2$ ja $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{7}{x_n})$. Väitetään, että $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{7}$.

Aluksi hiukan pohdintaa. Kirjoitetaan termi muotoon $x_{n+1}=\sqrt{7}\frac{1}{2}(\frac{x_n}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{7}}{x_n})$, jolloin havaitaan, että kaava "ottaa" luvun x_n ja skaalaa sen jakamalla luvulla $\sqrt{7}$. Sen jälkeen otetaan tämän luvun ja sen käänteisluvun keskiarvo, ja skaalataan tulos takaisin kertomalla luvulla $\sqrt{7}$. Silloin kaavan ydin on tavallaan siinä, että otetaan luvun ja sen käänteisluvun keskiarvo.

Jos luku on suurempi kuin 1, sen käänteisluku on sitä pienempi, jolloin keskiarvon ottaminen puolittaa etäisyyden lukuun 1. Tämä operaatio siis tuo termit yhä lähemmäs lukua 1, ja kun tulokset skaalataan takaisin luvulla $\sqrt{7}$, päädytään lähestymään lukua $\sqrt{7}$. Lisäksi, kun ollaan lähellä lukua 1, käänteisluku on "melkein yhtä kaukana" luvusta 1 kuin luku itse, jolloin keskiarvo on entistä lähempänä lukua 1.

Todistetaan sitten itse väite. Huomataan aluksi, että $x_n>0$ kaikilla n, koska seuraavan termin laskemiseksi käytetään vain positiivisten lukujen summaa, tuloa ja jakamista. Toisaalta jonon seuraava termi saadaan kahden luvun keskiarvona.

Olkoon $a>0$ jokin luku. Tarkastellaan lauseketta $\frac{1}{2}(a+\frac{7}{a})$.

Havaitaan aluksi, että

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a+\frac{7}{a}) &\geq \sqrt{7}\\ \Leftrightarrow a^2+7 &\geq 2\sqrt{7}a\\ \Leftrightarrow a^2-2\sqrt{7}a+7 &\geq 0.\end{aligned}$$

Tarkastellaan ylläolevaa polynomia. Sen diskriminantti on $D=(-2\sqrt{7})^2-4\cdot 7=4\cdot 7-4\cdot 7=0$, joten polynomilla on vain yksi nollakohta, joka on $a=\frac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$. Ylläoleva epäyhtälö pätee siis aina, ja yhtäsuuruus vain, kun $a=\sqrt{7}$.

Ylläolevaan kaavaan voidaan tietenkin ajatella sijoitettavan termien arvoja x_n, jolloin havaitaan, että kaikki jonon (x_n) termit, lukuunottamatta termiä x_1, ovat aina välttämättä suurempia kuin $\sqrt{7}$.

Havaitaan, että

$$a > \sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{7}a > 7 \Leftrightarrow \sqrt{7} > \frac{7}{a}.$$

Siis jos termi x_n on suurempi kuin luku $\sqrt{7}$, niin termi $\frac{7}{x_n}$ on pienempi kuin $\sqrt{7}$. Ylläolevan perusteella heti termistä x_2 alkaen tämä pätee.

Palataan siihen havaintoon, että termi x_{n+1} on keskiarvo luvusta x_n ja luvusta $\frac{7}{x_n}$. Jälkimmäinen näistä on aidosti pienempi kuin $\sqrt{7}$, joten luvun x_{n+1} pitää olla lukujen $\sqrt{7}$ ja x_n välissä. Oikeastaan luvun x_{n+1} pitää olla myös pienempi kuin lukujen $\sqrt{7}$ ja x_n keskiarvo.

Jokaisella askeleella lukujono siis ainakin "puolittaa" etäisyyden luvusta $\sqrt{7}$, joten lukujono lähestyy nopeasti ylhäältä lukua $\sqrt{7}$.

Tämän voi esittää tarkasti esimerkiksi tarkastelemalla lukujonoa $y_n = \sqrt{7}+\frac{1}{2^n}$, osoittamalla induktiolla, että jokaisella $n > 1$ pätee $\sqrt{7} < x_n \leq y_n$, havaitsemalla, että $\lim y_n = \sqrt{7}$ ja käyttämällä kuristuslemmaa. Alla täydellisyyden vuoksi tiiviisti esitetty induktioargumentti. Älä käytä tätä induktion opetteluun.

Alkuaskeleet. $x_1 = 2 < \sqrt{7}+\frac{1}{2}$ ja $x_2 = 2\frac{3}{4} < \sqrt{7}+\frac{1}{4}$ pätevät. Kaksi alkuaskelta tarvitaan, koska vasta sen jälkeen voidaan käyttää tietoa siitä, että $\frac{7}{x_k} < \sqrt{7}$ $(k \geq 2)$.

Induktioaskel $n+1$, kun $n \geq 2$. Induktio-oletus: $x_n < \sqrt{7} + \frac{1}{2^n}$ pätee. Halutaan osoittaa, että väite pätee termille x_{n+1}. Tämä seuraa epäyhtälöstä

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{7}{x_n}) &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\frac{7}{x_n} \\ &< \frac{1}{2}\sqrt{7} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{7} + \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

a) Miksi rekursio sitten lähestyy nopeasti lukua $\sqrt{7}$. Jo edellä saatiin, että termit lähestyvät melko nopeasti tätä lukua, mutta myös vahvempi tulos on mahdollinen. Tarkastellaan termin x_{n+1} etäisyyttä luvusta $\sqrt{7}$:

$$\begin{aligned} 0 < x_{n+1} - \sqrt{7} &= \frac{1}{2}(x_n + \frac{7}{x_n}) - \sqrt{7} \\ &= \frac{1}{2}x_n + \frac{7}{2x_n} - (\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}) \\ &= (\frac{1}{2}x_n - \frac{\sqrt{7}}{2}) + (\frac{7}{2x_n} - \frac{\sqrt{7}}{2}) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{7}) + \frac{1}{2}(\frac{7}{x_n} - \sqrt{7}). \end{aligned}$$

Havaitaan, että

$$\frac{7}{x_n} - \sqrt{7} = \frac{7 - \sqrt{7}x_n}{x_n} = \frac{\sqrt{7}}{x_n}(\sqrt{7} - x_n).$$

Siis yllä oikeanpuoleinen summan termi saadaan kertomalla vasemmanpuoleinen termi termillä $\frac{1}{2} \cdot \frac{-\sqrt{7}}{x_n}$. Voidaan siis kirjoittaa ylläoleva summa tulona ja saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x_n - \sqrt{7}) + \frac{1}{2}(\frac{7}{x_n} - \sqrt{7}) &= \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{7})(1 - \frac{\sqrt{7}}{x_n}) \\
&= \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{7})(x_n - \sqrt{7})\frac{1}{x_n} \\
&\leq \frac{1}{4}(x_n - \sqrt{7})^2.
\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö pätee, koska $x_n \geq 2$ pätee kaikilla n.

Tarkastellaan viimeistä lauseketta. $x_n - \sqrt{7}$ on termin x_n etäisyys luvusta $\sqrt{7}$, mikä on jotain melko pientä ja tässä jonossa aina alle 1. Sen jälkeen tämä pieni luku korotetaan toiseen potenssiin, jolloin luku pienenee entisestään, ja lopuksi otetaan vielä tästä luvusta neljäsosa. Saatu luku on yläraja termin x_{n+1} etäisyydelle luvusta $\sqrt{7}$, joten x_{n+1} on paljon lähempänä lukua $\sqrt{7}$ kuin x_n.

Kun ylläolevaa epäyhtälöä käytetään termille x_{n+3}, saadaan

$$\begin{aligned}
|x_{n+3} - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{4}(x_{n+2} - \sqrt{7})^2 &\leq \frac{1}{4}(\frac{1}{4}(x_{n+1} - \sqrt{7})^2)^2 \\
&\leq \frac{1}{4}(\frac{1}{4}(\frac{1}{4}(x_n - \sqrt{7})^2)^2)^2 \\
&= \frac{1}{4^7}(x_n - \sqrt{7})^6 < \frac{1}{4^7}
\end{aligned}$$

ja yleisemmin

$$|x_{n+p} - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{4^{2^p-1}}$$

kun $n \geq 1$ ja $p \geq 0$. Koska $2^8 = 256$ ja $4^{255} > 10^{100}$, termi x_{1+8} toteuttaa b-kohdan ehdon. Lopuksi täydellisyyden vuoksi ylläoleva kaava todistettuna induktiolla.

Induktio luvun p suhteen. Alkuaskel p=0: $|x_n - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{4^{2^0-1}} = 1$ pätee.

Induktioaskel $p+1$. Oletetaan $|x_{n+p} - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{4^{2^p-1}}$. Osoitetaan väite termille x_{n+p+1}:

$$|x_{n+p+1} - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{4}(x_{n+p} - \sqrt{7})^2 \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{4^{2^p-1}})^2 = \frac{1}{4^{2^{p+1}-1}}.$$