

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Harjoitus 4

29. 9. 2008 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa jatketaan työskentelyä lukujonojen kanssa. Nyt käyttöön on tullut raja-arvoa koskevia lauseita. Saat käyttää kaikkia luennolla olleita tai monisteesta löytyviä tietoja ellei erikseen muuta sanota. Mutta kerro ratkaisussasi, mitä käytit.

Kertaa tarvittaessa induktiota ja rekursiota koskevia tietoja.

1. Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 2)(2n^2 - 1)}{(n + 1)(n^3 + 3)}$$

2. Määritellään  $x_n = \frac{1}{n} \cos n$ . Osoita, että  $x_n \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$

(a) suoraan määritelmän perusteella;

(b) Lauseen 4.11 avulla.

Tehtävässä saat käyttää kaikkea koulussa kosinifunktiosta oppimaasi.

3. Onko jonolla  $(x_k)$  raja-arvoa, jos kaikilla  $k$  pätee  $x_k = \sqrt{k^2 + k} - \sqrt{k^2}$ ?

4. Oletetaan, että jono  $(x_n)$  on laskeva, jono  $(y_n)$  on nouseva, ja että kaikilla  $n$  pätee  $y_n \leq x_n$ . Osoita, että molemmat jonot suppenevat. (Vihje: voit osoittaa, että jono  $(x_n)$  on alhaalta rajoitettu ja jono  $(y_n)$  on ylhäältä rajoitettu.)

5. Osoita, että on olemassa reaaliluku  $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 7\}$  ja että  $a^2 = 7$ .

6. Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että jonon  $(x_n)$  raja-arvo on  $\sqrt{7}$ , jos  $x_1 = 2$  ja kaikilla  $n$  pätee

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{7}{x_n}\right).$$

Lisäkysymyksiä (ei vaadita tehtävän ruksaamiseen): (a) Osaatko selittää, miksi jono näyttää suppenevan nopeasti? (b) Osaatko antaa esimerkkiä indeksistä  $n$  jolle  $|x_n - \sqrt{7}| < 10^{-100}$ ?