

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Harjoitus 2

15. 9. 2008 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa opetellaan itseisarvon määritelmää ja itseisarvon käyttöä arvioinnissa.

1. (a) Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|3x - 6| < 1$? (b) Entä epäyhtälön $0 < |3x - 6| < 1$? Kannattaa käyttää itseisarvolemmaa ja huomata, että $|t| > 0$ täsmälleen silloin kun $t \neq 0$.

2. Oletetaan, että $|x - e| < 2^{-100}$ ja $|y - \pi| < 2^{-100}$. Mitä voit kolmioepäyhtälön avulla päätellä summien välisestä etäisyydestä $|(x + y) - (e + \pi)|$?

3. Etsi sellainen luku $K > 0$, jolle kaikilla välin $]1, 3[$ pisteillä x pätee

$$\left| \frac{x + 5}{2x + 7} - \frac{7}{11} \right| \leq K|x - 2|.$$

4. Oletetaan, että $|x - 3| < 7^{-13}$. Pitääkö välttämättä paikkansa $|x^2 - 9| < 7^{-12}$? Tehtävässä kannattaa arvioida ylöspäin lauseketta $|x^2 - 9|$.

5. Etsi sellainen luku $h > 0$, että $|x^2 - 9| < 10^{-100}$, aina kun $|x - 3| < h$. (Tässä "aina kun" tarkoittaa samaa kuin "kaikilla sellaisilla x , joille pätee ...") Tehtävässä kannattaa käyttää edellisen tehtävän arvioita lausekkeelle $|x^2 - 9|$.

6. Etsi sellainen luku $h > 0$, että $|\sqrt{x} - 3| < 10^{-100}$, aina kun $|x - 9| < h$. Tehtävässä kannattaa arvioida ylöspäin lauseketta $|\sqrt{x} - 3|$.