MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 10
24. 11. 2008 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttuja koulusta tuttujen funktioiden ominaisuuksia kuten kosinin jne. jatkuvuutta ja derivointisääntöä. Väliarvolauseesta on hyötyä monessa tehtävässä.

Osa tehtävistä muistuttaa koulutehtäviä: perustele ratkaisusi tämän kurssin lauseiden avulla.

1. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(0) = 7$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $x < f'(x) < 1$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$? Vihje: apufunktiosta $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ on iloa: kannattaa osoittaa, että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $g'(x) > 0$.

2. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla x pätee $|\cos x - 1| \leq |x|$. (Kannattaa muistaa, että $\cos 0 = 1$.)

3. Oletetaan, että $a_1, \ldots, a_n$ ovat reaalilukuja. Millä x ns. neliösumma $(x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$ saa pienimmän mahdollisen arvonsa?

4. Oletetaan, että $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$. Osoita, ettei funktio f ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Osoita tämän tuloksen avulla, ettei seuraavan tehtävän funktio ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

5. Tutki funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mahdollisia suurimpia ja pienimpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja, kun

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4+1}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

6. Oletetaan, että $h > 0$ ja että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ jatkuva välillä $]x_0 - h, x_0 + h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0 - h, x_0[$ ja $]x_0, x_0 + h[$. Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x\to x_0-} f'(x) = \lim_{x\to x_0+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0) = A$. Vihje: sovella väliarvolausetta erotusosamäärään.