MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 3 / Ratkaisuehdotuksia (LO)
24.9. - 26.9.2008

1. Oletetaan, että kaikilla n on

$$x_n = \frac{2n+1}{3n}.$$

Osoita, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$\left| x_n - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2n+1-2n}{3n} \right| = \left| \frac{1}{3n} \right| = \frac{1}{3n}\,.$$

Tässä

$$\frac{1}{3n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{3\varepsilon}\,.$$

Valitaan luvuksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ jokin lukua $\frac{1}{3\varepsilon} > 0$ suurempi kokonaisluku. Tällöin kun $n > n_\varepsilon$, niin $n > \frac{1}{3\varepsilon}$ ja siten

$$\left| x_n - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \varepsilon\,.$$

Näin on osoitettu, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}\,.$$

$\square$

2. Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5k-4}{3k^2+7} = 0.$$

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletetaan, että k on positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$\left| \frac{5k-4}{3k^2+7} - 0 \right| = \frac{|5k-4|}{|3k^2+7|} \overset{(1)}{=} \frac{5k-4}{3k^2+7} \overset{(2)}{<} \frac{5k}{3k^2+7} \overset{(3)}{<} \frac{5k}{3k^2} = \frac{5}{3k}\,.$$

Perusteluja:

(1) $k \geq 1$, joten $5k-4 > 0$ ja $3k^2+7 > 0$,

(2) $-4 < 0$, joten $5k-4 < 5k$,

(3) $7 > 0$, joten $3k^2+7 > 3k^2$.

Tässä

$$\frac{5}{3k} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; k > \frac{5}{3\varepsilon}\,.$$

Valitaan luvuksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ jokin lukua $\frac{5}{3\varepsilon} > 0$ suurempi kokonaisluku. Tällöin kun $k > n_\varepsilon$, niin $k > \frac{5}{3\varepsilon}$ ja siten

$$\left|\frac{5k-4}{3k^2+7} - 0\right| < \frac{5}{3k} < \varepsilon\,.$$

Näin on osoitettu, että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5k-4}{3k^2+7} = 0\,.$$

$\square$

3. Osoita, että

$$\frac{5k+4}{3k^2+7} \to 0 \;\text{ kun }\; k \to \infty.$$

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletetaan, että k on positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$\left|\frac{5k+4}{3k^2+7} - 0\right| = \frac{|5k+4|}{|3k^2+7|} \overset{(1)}{=} \frac{5k+4}{3k^2+7} \overset{(2)}{\leq} \frac{5k+4k}{3k^2+7} \overset{(3)}{<} \frac{9k}{3k^2} = \frac{3}{k}\,.$$

Perusteluja:

(1) $k \geq 1$, joten $5k+4 > 0$ ja $3k^2+7 > 0$,

(2) $1 \leq k$, joten $4 \leq 4k$,

(3) $7 > 0$, joten $3k^2+7 > 3k^2$.

Tässä

$$\frac{3}{k} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; k > \frac{3}{\varepsilon}\,.$$

Valitaan luvuksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ jokin lukua $\frac{3}{\varepsilon} > 0$ suurempi kokonaisluku. Tällöin kun $k > n_\varepsilon$, niin $k > \frac{3}{\varepsilon}$ ja siten

$$\left|\frac{5k+4}{3k^2+7} - 0\right| < \frac{3}{k} < \varepsilon\,.$$

Näin on osoitettu, että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5k+4}{3k^2+7} = 0\,.$$

$\square$

4. Oletetaan, että $1 < \lim_{k\to\infty} x_k < 2$. (Oletus sisältää tiedon, että tutkittava jono suppenee.) Osoita, että on olemassa sellainen n, että $1 < x_k < 2$ kaikilla $k > n$. Tämäkin tehtävä on tarkoitus tehdä käyttäen suoraan lukujonon raja-arvon määritelmää.

Ratkaisu: Merkitään $a = \lim_{k\to\infty} x_k$. Oletuksen mukaan $1 < a < 2$, joten $2-a > 0$ ja $a-1 > 0$. Olkoon $\varepsilon = \min\{2-a, a-1\}$, jolloin $\varepsilon > 0$. (Luvuksi ε valitaan siis pienempi luvuista $2-a$ ja $a-1$.) Luku a on lukujonon (x_n) raja-arvo, joten on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $|x_k - a| < \varepsilon$, kun $k > n_\varepsilon$.

Oletetaan, että $k > n_\varepsilon$. Tällöin $|x_k - a| < \varepsilon \le 2-a$, joten itseisarvolemman mukaan

$$\begin{aligned} & -(2-a) < x_k - a < 2-a \\ \Rightarrow\quad & -2+a < x_k - a < 2-a \\ \Rightarrow\quad & -2+2a < x_k < 2 \\ \Rightarrow\quad & x_k < 2\,. \end{aligned}$$

Toisaalta $|x_k - a| < \varepsilon \le a-1$, joten itseisarvolemman mukaan

$$\begin{aligned} & -(a-1) < x_k - a < a-1 \\ \Rightarrow\quad & 1-a < x_k - a < a-1 \\ \Rightarrow\quad & 1 < x_k < 2a-1 \\ \Rightarrow\quad & 1 < x_k\,. \end{aligned}$$

Näin on osoitettu, että $1 < x_k < 2$ kaikilla $k > n_\varepsilon$. Luvuksi n voidaan siis valita luku n_ε. $\square$

5. Osoita, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = 1.$$

ei pidä paikkaansa. Ratkaisussa pitää käyttää suoraan lukujonon raja-arvon määritelmää. (Seuraisiko muuten tulos myös tehtävästä 1 ja monisteen lauseista?)

Ratkaisu: Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$\left|\frac{2n+1}{3n} - 1\right| = \left|\frac{2n+1-3n}{3n}\right| = \frac{|1-n|}{|3n|} \overset{(1)}{=} \frac{-(1-n)}{3n} = \frac{n-1}{3n}\,.$$

Yhtälössä (1) käytetään tietoa, että $1 \le n$, joten $1 - n \le 0$.

Tässä

$$\frac{n-1}{3n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n} < \frac{1}{3}\,,$$

joten valitaan jokin lukua $\frac{1}{3}$ pienempi luku, esimerkiksi $\frac{1}{4}$ ja pyritään osoittamaan, että jostain n:n arvosta alkaen

$$\left|\frac{2n+1}{3n} - 1\right| = \frac{n-1}{3n} > \frac{1}{4}\,.$$

Tässä
$$\frac{n-1}{3n} > \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; 4n-4 > 3n \;\Leftrightarrow\; n > 4\,.$$
Siis jos $n > 4$, niin
$$\left|\frac{2n+1}{3n} - 1\right| = \frac{n-1}{3n} > \frac{1}{4}\,.$$
Lukua $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$ kohti ei siis ole sellaista lukua $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla
$$\left|\frac{2n+1}{3n} - 1\right| < \varepsilon = \frac{1}{4} \;\text{ aina, kun } n > n_\varepsilon\,.$$
Näin ollen luku 1 ei ole lukujonon $(\frac{2n+1}{3n})$ raja-arvo. □

Tulos seuraisi myös tehtävästä 1 ja monisteen lauseista:

Lauseen 4.1 mukaan lukujonolla voi olla enintään yksi raja-arvo. Tehtävän 1 mukaan
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}\,, \quad \text{joten} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} \neq 1\,.$$

6. Oletetaan, että kaikilla n on
$$x_n = (-1)^n n.$$
Suppeneeko vai hajaantuuko jono (x_n)?

Ratkaisu: Osoitetaan, että jono (x_n) hajaantuu. Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Tällöin
$$|x_n - a| = |(-1)^n n - a| \overset{(1)}{\geq} \big||(-1)^n n| - |a|\big| = \big|n - |a|\big|\,.$$
Oletetaan lisäksi, että $n > |a| + 1$. Tällöin
$$|x_n - a| \geq \big|n - |a|\big| \overset{(2)}{=} n - |a| \overset{(3)}{>} |a| + 1 - |a| = 1\,.$$
Perusteluja:

(1) kolmioepäyhtälön vasen puoli (ks. s. 7, huomautus 1),

(2) tehdyn oletuksen mukaan $n > |a| + 1$, joten $n - |a|$ on positiivinen,

(3) tehdyn oletuksen mukaan $n > |a| + 1$.

Siis jos $n > |a| + 1$, niin $|x_n - a| > 1$. Lukua $\varepsilon = 1 > 0$ kohti ei näin ollen ole sellaista lukua $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla
$$|x_n - a| < \varepsilon = 1 \;\text{ aina, kun } n > n_\varepsilon\,.$$
Luku a ei siis ole lukujonon (x_n) raja-arvo.

Luku a saattoi tässä olla mikä tahansa reaaliluku, joten lukujonolla (x_n) ei ole raja-arvoa. Siis lukujono (x_n) hajaantuu. □