MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 10 / Ratkaisuehdotuksia (LO)
26.11. - 28.11.2008

1. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(0) = 7$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $x < f'(x) < 1$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$?

   Vihje: apufunktiosta $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ on iloa: kannattaa osoittaa, että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $g'(x) > 0$.

   Ratkaisu: Funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$, joten väliarvolauseen mukaan on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in \,]0,1[$, että

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)(1-0) \quad \text{eli} \quad f(1) = f(0) + f'(\xi)\,.$$

   Koska oletuksen mukaan $x < f'(x) < 1$ kaikilla $x \in \,]0,1[$ ja $\xi \in \,]0,1[$, niin erityisesti $f'(\xi) < 1$. Näin ollen

$$f(1) = f(0) + f'(\xi) < 7 + 1 = 8\,.$$

   Tarkastellaan apufunktiota $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ kaikilla $x \in [0,1]$. Funktio g on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$, joten väliarvolauseen mukaan on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\zeta \in \,]0,1[$, että

$$g(1) - g(0) = g'(\zeta)(1-0)\,.$$

   Tässä

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) &= f(1) - \frac{1}{2} - f(0) = f(1) - \frac{15}{2} \quad \text{ja} \\ g'(\zeta) &= f'(\zeta) - \zeta > 0\,, \end{aligned}$$

   sillä $\xi \in \,]0,1[$ ja $f'(x) > x$ kaikilla $x \in \,]0,1[$. Näin ollen

$$f(1) - \frac{15}{2} = f'(\zeta) - \zeta > 0\,, \quad \text{joten} \quad f(1) > \frac{15}{2}\,.$$

   Siis tiedetään, että

$$7\tfrac{1}{2} < f(1) < 8\,.$$

   □

2. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla x pätee $|\cos x - 1| \leq |x|$. (Kannattaa muistaa, että $\cos 0 = 1$.)

   Ratkaisu:

   1° Oletetaan, että $x = 0$. Tällöin

$$|\cos x - 1| = |\cos 0 - 1| = |1 - 1| = |0| = |x|\,,$$

   joten väite pätee.

2° Oletetaan, että $x > 0$. Funktio $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0, x]$ ja derivoituva välillä $]0, x[$, joten väliarvolauseen mukaan on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in\,]0, x[$, että

$$\cos x - \cos 0 = -\sin\xi\,(x-0) \quad \text{eli} \quad \cos x - 1 = -x\sin\xi\,.$$

Tässä käytettiin tietoa, että $D\cos x = -\sin x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Lisäksi tiedetään, että $|\sin x| \le 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen

$$|\cos x - 1| = |-x\sin\xi| = |-x||\sin\xi| = |x||\sin\xi| \le |x|\,.$$

3° Oletetaan, että $x < 0$. Funktio $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[x, 0]$ ja derivoituva välillä $]x, 0[$, joten väliarvolauseen mukaan on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in\,]x, 0[$, että

$$\cos 0 - \cos x = -\sin\xi\,(0-x) \quad \text{eli} \quad 1 - \cos x = x\sin\xi\,.$$

Tästä seuraa kuten edellä kohdassa 2°, että

$$|\cos x - 1| = |x||\sin\xi| \le |x|\,.$$

□

3. Oletetaan, että $a_1, \ldots, a_n$ ovat reaalilukuja. Millä x ns. neliösumma $(x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$ saa pienimmän mahdollisen arvonsa?

Ratkaisu: Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = (x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2 \quad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Tässä

$$\begin{aligned}(x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2 &= x^2 - 2xa_1 + a_1^2 + \ldots + x^2 - 2xa_n + a_n^2 \\ &= nx^2 - 2x(a_1 + \ldots + a_n) + a_1^2 + \ldots + a_n^2\,,\end{aligned}$$

joten funktio f on polynomifunktiona derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja

$$f'(x) = 2nx - 2(a_1 + \ldots + a_n)\,.$$

Nyt

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2nx - 2(a_1 + \ldots + a_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\,.$$

Merkitään $x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$. Derivaatta f' on ensimmäisen asteen polynomifunktio ja sen kuvaaja on nouseva suora, joten derivaatan f' arvot ovat negatiivisia, kun $x < x_0$, ja positiivisia, kun $x > x_0$. Siis funktio f on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, x_0[$ ja aidosti kasvava välillä $]x_0, \infty[$. Näin ollen funktiolla f on pienin arvo, jonka se saavuttaa kohdassa $x = x_0$.

Neliösumma $(x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$ saa siis pienimmän mahdollisen arvonsa, kun

$$x = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\,.$$

□

4. Oletetaan, että $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$. Osoita, ettei funktio f ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Osoita tämän tuloksen avulla, ettei seuraavan tehtävän funktio ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

Ratkaisu: Oletetaan, että $0 < h < 1$. Funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,h]$ ja derivoituva välillä $]0,h[$, joten väliarvolauseen mukaan on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in\ ]0,h[$, että

$$f(h) - f(0) = f'(\xi)(h-0) \quad \text{eli} \quad \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(\xi)\,.$$

Tässä $\xi \to 0+$, kun $h \to 0+$ (sillä $\xi \in\ ]0,h[$). Näin ollen

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{\xi\to 0+} f'(\xi) = \infty\,.$$

Funktion f erotusosamäärä kohdassa $x = 0$ kasvaa siis rajatta, kun $h \to 0+$. Siten funktio f ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. □

Osoitetaan tämän tuloksen avulla, ettei funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4+1}} \qquad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

Funktio f on jatkuva, sillä $x^4 + 1 \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Funktio f on derivoituva, kun $x \neq 0$, ja tällöin sen derivaatta on

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{(x^4+1)\cdot 2x - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x(1-x^4)}{(x^4+1)^{-\frac{2}{3}}(x^4+1)^2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1-x^4}{\sqrt[3]{x(x^4+1)^4}}\,. \end{aligned}$$

Osoitetaan lemman 5.7 avulla, että $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$. Huomataan ensin, että kaikilla $x \in\ ]0,1[$ pätee $f'(x) > 0$. Lisäksi

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x(x^4+1)^4}}{1-x^4} \longrightarrow 0 \quad \text{kun} \quad x \to 0+\,,$$

joten $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$. Siis f ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. □

5. Tutki funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mahdollisia suurimpia ja pienimpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja, kun

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4+1}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu: Havaitaan, että

$$\frac{x^2}{x^4+1} > 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ja } \frac{x^2}{x^4+1} = 0\,, \text{ kun } x = 0\,.$$

Siten $f(x) > 0$, kun $x \neq 0$ ja $f(0) = 0$, joten funktiolla f on pienin arvo, joka on 0. Samalla se on funktion f oleellinen lokaali minimiarvo.

Funktio f on derivoituva, kun $x \neq 0$, ja tällöin sen derivaatta on edellisen tehtävän ratkaisun mukaan

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-x^4}{\sqrt[3]{x(x^4+1)^4}}\,.$$

Siten

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ tai } x = -1\,.$$

Siis funktion f muut mahdolliset ääriarvokohdat ovat $x = -1$ ja $x = 1$.

Tarkastellaan derivaatan f' merkkiä nollakohtien sekä epädervivoituvuuskohdan $x = 0$ eri puolilla:

		-1	0	1	
osoittaja: $1-x^4$	$-$	$+$	$+$	$-$
nimittäjä: $\sqrt[3]{x(x^4+1)^4}$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Havaitaan, että $f'(x) > 0$, kun $x < -1$, ja $f'(x) < 0$, kun $-1 < x < 0$. Näin ollen funktio f on aidosti kasvava välillä $]-\infty, -1[$ ja aidosti vähenevä välillä $]-1, 0[$. Siis $x = -1$ on funktion f olennainen lokaali maksimikohta (lause 8.8, f'-testi ääriarvokohdille).

Toisaalta $f'(x) > 0$, kun $0 < x < 1$, ja $f'(x) < 0$, kun $1 < x$. Näin ollen funktio f on aidosti kasvava välillä $]0, 1[$ ja aidosti vähenevä välillä $]1, \infty[$. Siis $x = 1$ on funktion f olennainen lokaali maksimikohta.

Nyt

$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = f(1) \text{ ja } f(x) < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\,,$$

joten funktiolla f on suurin arvo, joka on $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. □

6. Oletetaan, että $h > 0$ ja että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $]x_0 - h, x_0 + h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0 - h, x_0[$ ja $]x_0, x_0 + h[$. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = \lim_{x \to x_0+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0) = A$.

   Vihje: sovella väliarvolausetta erotusosamäärään.

Ratkaisu: Oletetaan, että $0 < k < h$. Funktio $f\colon]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[x_0 - k, x_0]$ ja derivoituva välillä $]x_0 - k, x_0[$, joten väliarvolauseen mukaan on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in]x_0 - k, x_0[$, että

$$f(x_0) - f(x_0 - k) = f'(\xi)(x_0 - x_0 + k) \quad \text{eli} \quad f(x_0) - f(x_0 - k) = f'(\xi)k\,.$$

Näin ollen

$$\frac{f(x_0 - k) - f(x_0)}{-k} = f'(\xi)\,.$$

Oletuksen mukaan $k > 0$, joten $-k < 0$. Lisäksi $\xi \in]x_0 - k, x_0[$, joten $\xi \to x_0-$, kun $-k \to 0-$. Näin ollen

$$\lim_{-k \to 0-} \frac{f(x_0 - k) - f(x_0)}{-k} = \lim_{\xi \to x_0-} f'(\xi) = A\,,$$

joten funktiolla f on vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 ja sen arvo $f'_-(x_0) = A$.

Vastaavasti funktio $f\colon]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[x_0, x_0 + k]$ ja derivoituva välillä $]x_0, x_0 + k[$, joten väliarvolauseen mukaan on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\zeta \in]x_0, x_0 + k[$, että

$$f(x_0 + k) - f(x_0) = f'(\zeta)(x_0 + k - x_0) \quad \text{eli} \quad f(x_0 + k) - f(x_0) = f'(\zeta)k\,.$$

Näin ollen

$$\frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} = f'(\zeta)\,.$$

Tässä $\zeta \to x_0+$, kun $k \to 0+$. Näin ollen

$$\lim_{k \to 0+} \frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} = \lim_{\zeta \to x_0+} f'(\zeta) = A\,,$$

joten funktiolla f on oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 ja sen arvo $f'_+(x_0) = A$. Siis $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = A$, joten f on derivoituva pisteessä x_0 ja $f'(x_0) = A$. $\square$