Analyysi I, 1. kurssikoe to 16.10.2008, ratkaisut (Jouni Luukkainen), 3 sivua

1. On perustellen selvitettävä $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)(3n+4)}{(5n+6)(7n+8)}$.

Ratk. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)(3n+4)}{(5n+6)(7n+8)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(3+4\cdot\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(5+6\cdot\frac{1}{n}\right)\left(7+8\cdot\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(3+4\cdot\frac{1}{n}\right)}{\left(5+6\cdot\frac{1}{n}\right)\left(7+8\cdot\frac{1}{n}\right)} =$
$\dfrac{(1+2\cdot 0)(3+4\cdot 0)}{(5+6\cdot 0)(7+8\cdot 0)} = \dfrac{3}{35}$.

Yllä lasku on esitetty sinänsä riittävän yksityiskohtaisesti, jotta kurssin tietojen käyttö kussakin vaiheessa voidaan siitä tunnistaa. Mutta tarkoitus oli, että lasku perustellaan eritellysti luentojen ja tämänkaltaisten harjoitustehtävien tyyliin. Tehdään tämä seuraavassa.

Jos $n \in \mathbb{N}$, niin $(5n+6)(7n+8) \neq 0$ ja $\dfrac{(n+2)(3n+4)}{(5n+6)(7n+8)} = \dfrac{\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+4\cdot\frac{1}{n}\right)}{\left(5+6\cdot\frac{1}{n}\right)\left(7+8\cdot\frac{1}{n}\right)}$ supistamalla n^2:lla.

”Raja-arvojen aritmetiikasta” tarvitaan seuraavat tulokset: Jos (x_n) ja (y_n) ovat suppenevia lukujonoja, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ja $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, niin lukujonot $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ suppenevat, $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$; jos pätee lisäksi, että $y_n \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $y \neq 0$, niin lukujono (x_n/y_n) suppenee ja $\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = x/y$. Tarvitaan myös tulokset, että jos $a \in \mathbb{R}$, niin vakiojonolle $(x_n) = (a)$ on $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, ja että $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

Nyt voidaan päätellä, että $2\cdot\frac{1}{n} \to 2\cdot 0 = 0$, $4\cdot\frac{1}{n} \to 4\cdot 0 = 0$, $6\cdot\frac{1}{n} \to 6\cdot 0 = 0$ ja $8\cdot\frac{1}{n} \to 8\cdot 0 = 0$, kun $n\to\infty$; tämän jälkeen, että $1+2\cdot\frac{1}{n} \to 1+0 = 1$, $3+4\cdot\frac{1}{n} \to 3+0 = 3$, $5+6\cdot\frac{1}{n} \to 5+0 = 0$ ja $7+8\cdot\frac{1}{n} \to 7+0 = 7$, kun $n\to\infty$; seuraavaksi, että $\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(3+4\cdot\frac{1}{n}\right) \to 1\cdot 3 = 3$ ja $\left(5+6\cdot\frac{1}{n}\right)\left(7+8\cdot\frac{1}{n}\right) \to 5\cdot 7 = 35$, kun $n\to\infty$; sekä lopuksi, koska $35 \neq 0$, että $\dfrac{\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(3+4\cdot\frac{1}{n}\right)}{\left(5+6\cdot\frac{1}{n}\right)\left(7+8\cdot\frac{1}{n}\right)} \to \dfrac{3}{35}$, kun $n\to\infty$.

Arvostelusta (Anna Kairema). ”Noudatin pisteytyksessä seuraavia yleislinjoja: Merkintöjen väärinkäyttö -1p. Pienistä laskuvirheistä en sakottanut. Ratkaisusta tuli ilmetä, että se perustuu tietoon jonon $(1/n)$ sekä vakiojonon suppenemisesta, mistä edetään monimutkaisempien lausekkeiden raja-arvojen tutkimiseen. Useimmat olivat perustelleet ratkaisuaan perusteellisesti. Puutteellisesta perustelusta sakotin -1p, mutta kaikenkaikkiaan noudatin lempeää linjaa.”

2. On osoitettava lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että $\lim_{n\to\infty} \dfrac{7n+1}{n+7} = 7$.

Ratk. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, niin

$$\left|\frac{7n+1}{n+7} - 7\right| = \left|\frac{7n+1-7n-49}{n+7}\right| = \frac{48}{n+7} < \frac{48}{n} < \varepsilon,$$

kun $n > 48/\varepsilon$. Valitaan (reaalilukujen täydellisyysaksiomaan perustuvan Arkhimedeen lauseen nojalla) sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $n_\varepsilon > 48/\varepsilon$. Nyt, jos $n > n_\varepsilon$, niin $n > 48/\varepsilon$, joten $\left|\dfrac{7n+1}{n+7} - 7\right| < \varepsilon$.

Arvostelusta (JL). Indeksin $n_\varepsilon \in N$ unohtaminen kokonaan vei kaksi pistettä. Valinta $n_\varepsilon = 48/\varepsilon$ (tai vastaava), joka sallisi, että $n_\varepsilon \notin \mathbb{N}$, vei pisteen. Lausekkeen sieventämisessä laskuvirheet veivät pisteitä;

erityisesti luvun 7 kertotaulu oli osattava: $7^2 = 49$!! Logiikan tai esityksen muu paha onnahtaminen saattoi viedä pisteen.

3. On osoitettava funktion raja-arvon määritelmän avulla, vetoamatta neliöjuurifunktion jatkuvuuteen, että $\lim_{x\to 2} \sqrt{x+1} = \sqrt{3}$.

Ratk. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $x \geq -1$, niin

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{x+1} - \sqrt{3}| &= \frac{|(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})|}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3}} = \frac{|(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{3})^2|}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3}} = \frac{|x+1-3|}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3}} = \frac{|x-2|}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3}} \\
&\leq \frac{|x-2|}{\sqrt{3}} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

kun $|x-2| < \varepsilon\sqrt{3}$. Valitaan $\delta_\varepsilon = \min\{3, \varepsilon\sqrt{3}\} > 0$. Nyt, jos $0 < |x-2| < \delta_\varepsilon$, niin $|x-2| < 3$ ja siis $x > -1$ sekä $|x-2| < \varepsilon\sqrt{3}$, joten $|\sqrt{x+1} - \sqrt{3}| < \varepsilon$.

Arvostelusta (Anna Kairema). ”Noudatin pisteytyksessä seuraavia yleislinjoja:

Seuraavat virheet verottivat -1p:
* arviointivirhe (tyypillisesti nimittäjää arvioitiin ylöspäin)
* epämääräisyys määritelmän käytössä
* puuttui jokin määritelmän oleellisista kohdista; ”olkoon $\varepsilon > 0$”, ”valitaan $\delta \ldots > 0$” tai ”oletetaan, että $0 < |x-2| < \delta$”
* ei oteta huomioon (millään tavoin), että tulee olla $x \geq -1$

4p vastauksessa
* tuli ilmetä, että $\varepsilon > 0$ on valittu mielivaltaisesti ja δ sen mukaan
* -2p verotin, jos oli väittänyt, että voidaan olettaa että $x > 2$ (tai vaihtoehtoisesti $x < 2$)
* Jos ei ε:n ja δ:n roolit määritelmän käytössä käyneet ilmi, tehtävä oli 3p arvoinen

3p vastauksessa
* oli päästävä etäisyyden $|\sqrt{x+1} - \sqrt{3}|$ arvioinnissa siihen saakka, että etäisyys $|x-2|$ on näkyvillä. Lisäksi tuli näkyvillä olla jonkinlaista raja-arvon määritelmän käyttöä.

2p vastauksessa
* oli lähdetty arvioimaan etäisyyttä $|\sqrt{x+1} - \sqrt{3}|$
* jokin maininta ε:ista ja δ:sta
* vaihtoehtoisesti, jos määritelmä oli kirjoitettu oikein ja sanallisesti selvitetty miten edettäisi (jos osattaisi), herui 2p

1p sai jos
* oli kirjoittanut määritelmän oikein (muttei osannut käyttää/selittää)
* oli lähdetty arvioimaan etäisyyttä $|\sqrt{x+1} - \sqrt{3}|$ mutta lausekkeen käsittelyssä oli kohtalokkaita virheitä

Jos raja-arvon oli perustellut käyttäen jotakin (”luennolla esillä ollutta”) tulosta, annoin tapauksesta riippuen 2–4p; muutama opiskelija oli sangen ansiokkaasti edennyt ”mutkan kautta”.”

4. On perustellen määritettävä, suppeneeko vai hajaantuuko lukujono (x_n), joka määritellään ehdoilla $x_1 = 1$ ja $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2^{(n^2)}}$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ratk. (Huom. $2^{(n^2)} = 2^{n^2}$, kun taas $(2^n)^2 = 2^{2n}$; nyt $2^{n^2} = 2^{2n}$ vain, jos $n = 0$ tai $n = 2$.)

Koska $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2^{(n^2)}} > x_n + 0 = x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin jono (x_n) on (aidosti) **nouseva**. Osoitetaan, että jono (x_n) on **ylhäältä rajoitettu**. Tällöin tiedetään, että jono (x_n) **suppenee**.

Huomataan, että kun $n \in \mathbb{N}$, niin $n^2 \geq n$, joten

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{(n^2)}} \leq x_n + \frac{1}{2^n} = x_n + (\tfrac{1}{2})^n.$$

Herää ajatus, että olisi $x_n \le 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \ldots + (\frac{1}{2})^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^k = \dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$ (geometrisen summan kaavaa käyttäen) kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Saattaa myös ensinnä tehdä havainnon, että $x_2 = x_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$ ja $x_3 \le x_2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$ sekä $x_1 = 1 = 2 - 1$.

Osoitetaan siksi suoraan induktiota käyttäen, että kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee väite

$$(*_n) \qquad x_n \le 2 - (\tfrac{1}{2})^{n-1}.$$

Ensinnäkin $x_1 = 1 = 2 - 1 = 2 - (\frac{1}{2})^{1-1}$, joten $(*_1)$ pätee. Jos sitten $n \in \mathbb{N}$ on mielivaltainen sellainen indeksi, jolla $(*_n)$ pätee, niin tällöin

$$x_{n+1} \le x_n + (\tfrac{1}{2})^n \le \big(2 - (\tfrac{1}{2})^{n-1}\big) + (\tfrac{1}{2})^n = 2 - (\tfrac{1}{2})^n = 2 - (\tfrac{1}{2})^{(n+1)-1}$$

eli myös $(*_{n+1})$ pätee. Siis $(*_n)$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Nyt $(*_n)$ antaa $x_n < 2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Täten jono (x_n) on ylhäältä rajoitettu luvulla 2.

Vaihtoehtoisesti ylärajan 2 osoittamiseksi määritellään jono (y_n) asettamalla $y_1 = 1$ ja $y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2^n}$, kun $n \ge 1$. Osoitetaan induktiolla, että $x_n \le y_n$ kaikilla $n \ge 1$: Ensinnäkin $x_1 = 1 = y_1$; jos sitten $n \ge 1$ ja $x_n \le y_n$, niin $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2^{n^2}} \le y_n + \dfrac{1}{2^n} = y_{n+1}$. Tämän jälkeen osoitetaan, että $y_n = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$, kun $n \ge 1$; voidaan käyttää induktiota tai huomiota, että $y_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^k$ on taulukoista löytyvä geometrinen summa, kun $n \ge 1$. Näin ollen $x_n \le 2$, kun $n \ge 1$.

Arvostelusta (JL). Kumpikin huomioista, että (x_n) on nouseva ja että (x_n) on ylhäältä rajoitettu, toi (siis todistuksittakin) yhden pisteen, samoin näiden sijasta pelkkä huomautus, että ylhäältä rajoitettu nouseva jono suppenee. Näin saattoi päästä 2 pisteeseen. Pisteen toi myös huomio, että $1/2^{n^2} \le 1/2^n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Päättymättömien sarjojen käytöstä sakotettiin; olisi pitänyt käyttää niiden äärellisiä osasummia.

Cauchy'n ehtoa ei kukaan ollut osannut käyttää oikein (tarvitaan epäyhtälö $|x_{n+p} - x_n| \le |y_{n+p} - y_n| \; \forall n, p \in \mathbb{N}$ ja jonon (y_n) suppeneminen). Moni oli osoittanut, että $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ ja sitten väittänyt, että tämän perusteella (x_n) suppenee. **Mutta tällainen suppenemiskriteerio ei lukujonoille päde.** Esimerkiksi, jos $x_n = \ln n \; \forall n \in \mathbb{N}$, niin $x_{n+1} - x_n = \ln((n+1)/n) = \ln(1 + 1/n) \to \ln 1 = 0$, mutta $x_n \to \infty$, kun $n \to \infty$; toinen esimerkki, läheinen tälle, saadaan lukujen $x_n = \sum_{k=1}^{n} (1/k)$ jonosta; sille on $x_{n+1} - x_n = 1/(n+1) \to 0$, mutta (kuten myöhemmin osoitetaan) $x_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.