MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
1. kurssikoe 21.10.2008 (korvaava koe) / Ratkaisuehdotuksia (AK), 2 sivua

1. Selvitä
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^3+2008)}{(n^3+1)(3n+2008)}.$$

Ratkaisu: Käytämme seuraavia tietoja

(1) Jonon $(1/n)$ raja-arvo tunnetaan : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$

(2) Vakiojonon (x_n), missä $x_n = a \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$

(3) Tulon raja-arvoa koskevan tuloksen nojalla
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = a \cdot 0 = 0 \text{ aina, kun } a \in \mathbb{R} \quad \text{ja}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{k \text{ kpl}} = 0, \text{ aina, kun } k \in \mathbb{N},$$

(4) Summan raja-arvoa koskevan tuloksen nojalla $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b,$ jos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b.$

Koska
$$\frac{(n+1)(n^3+2008)}{(n^3+1)(3n+2008)} = \frac{n(1+1/n)n^3(1+2008/n^3)}{n^3(1+1/n^3)n(3+2008/n)} = \frac{(1+1/n)(1+2008/n^3)}{(1+1/n^3)(3+2008/n)},$$
ja tässä tietojen $(1)-(4)$ nojalla osoittajalle on voimassa
$$(1+1/n)(1+2008/n^3) \longrightarrow (1+0)(1+0) = 1, \text{ kun } n \to \infty$$
sekä nimittäjälle on voimassa
$$(1+1/n^3)(3+2008/n) \longrightarrow (1+0)(3+0) = 3 \neq 0, \text{ kun } n \to \infty,$$
on osamäärää koskevan tuloksen nojalla voimassa
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^3+2008)}{(n^3+1)(3n+2008)} = \frac{1}{3}.$$

2. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1.$$

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ ja oletetaan, että $n > N_\varepsilon$. Tällöin
$$\left| \frac{n^2+1}{n^2} - 1 \right| = \left| \frac{n^2+1-n^2}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Arviossa $(*)$ on käytetty tietoa $n \in \mathbb{N}$, joten $n \geq 1$. Tällöin $n^2 \geq n$, joten $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$.

3. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2}.$$

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\} > 0$ ja oletetaan, että $0 < |x-1| < \delta$. Tällöin $0 < |x-1| < 1$ ja $0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nyt pätee

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}| &= \left| \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}} \right| \overset{(1)}{=} \frac{|x^2+1-2|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{|x^2-1|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}} \overset{(2)}{\leq} |x+1|\,|x-1| \overset{(3)}{<} 3\,|x-1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Perusteluja:

(1) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$,

(2) $x^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten $\sqrt{x^2+1} \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja siis $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2} \geq 1 + \sqrt{2} > 1$.Tästä seuraa, että $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}} \leq 1$,

(3) Oletimme, että $0 < |x-1| < 1$, joten $0 < x < 2$ ja siis $|x+1| = x + 1 < 3$.

4. Oletetaan, että jono (x_n) on nouseva ja että jono (y_n) suppenee. Oletetaan lisäksi, että kaikilla n pätee $x_n \leq y_n$. Osoita, että jono (x_n) suppenee.

Ratkaisu: Oletuksen mukaan jono (y_n) suppenee. Merkitään $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla lukua $\varepsilon = 1$ kohti on olemassa sellainen luku $N_1 \in \mathbb{N}$, että aina kun $n > N_1$, niin

$$|y_n - a| < 1.$$

Itseisarvolemman nojalla

$$-1 < y_n - a < 1, \quad \text{kun } n > N_1 \quad \text{eli} \quad a - 1 < y_n < 1 + a, \quad \text{kun } n > N_1.$$

Oletuksen nojalla $x_n \leq y_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $M = \max\{y_1, y_2, \ldots, y_{N_1}\}$. Luku M on siis jonon (y_n) ensimmäisestä N_1 termistä suurin. Siis pätee

$$x_n \leq y_n \leq M, \quad \text{kun } n \leq N_1.$$

Toisaalta, kun $n > N_1$ on voimassa

$$x_n \leq y_n < 1 + a.$$

Valitsemalla nyt $K = \max\{M, 1+a\}$, voimme todeta, että

$$x_n \leq K, \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Jono (x_n) on siis ylhäältä rajoitettu (luvulla K). Nousevana ja ylhäältä rajoitettuna jonona (x_n) suppenee.