MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 10 / Ratkaisuehdotuksia (AK), 5 sivua
24. 11. 2008 alkavalle viikolle

1. Tutki funktion $f\colon [0,7] \to \mathbb{R}$ mahdollisia suurimpia ja pienimpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja, kun

$$f(x) = |(x-2)^2 - 1|$$

kaikilla $x \in [0,7]$. Huolelliset perustelut! (Tarkista monisteesta, miten lokaaliset ääriarvot määritellään siellä.)

Ratkaisu: Tarkastellaan lausekkeen $(x-2)^2 - 1$ merkkiä, kun $x \in [0,7]$:

$$(x-2)^2-1 = 0 \iff (x-2)^2 = 1 \iff x-2 = \pm 1 \iff x = 1 \text{ tai } x = 3.$$

Lausekkeen $(x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Siis $(x-2)^2 - 1 > 0$, kun $0 \leq x < 1$, $(x-2)^2 - 1 < 0$, kun $1 < x < 3$, ja $(x-2)^2 - 1 > 0$, kun $3 < x \leq 7$. Itseisarvon määritelmän nojalla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{kun } 1 < x < 3, \\ x^2 - 4x + 3, & \text{kun } 3 < x \leq 7. \end{cases}$$

Funktio f on siis derivoituva ainakin, kun $x \in]0,7[$ ja $x \neq 1$, $x \neq 3$, ja

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{kun } 0 < x < 1, \\ -2x + 4, & \text{kun } 1 < x < 3, \\ 2x - 4, & \text{kun } 3 < x < 7. \end{cases}$$

Käytämme aidon kasvavuuden lausetta (moniste s. 57) sekä $f'-$testiä ääriarvokohdille (moniste s. 58). Jatkuvana funktiona f' voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan ja pisteissä, joissa sitä ei ole määritelty. Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0 \iff 2x - 4 = 0 \iff x = 2.$$

Tutkitaan derivaatan merkkiä pisteiden $x = 1, x = 2$ ja $x = 3$ molemmin puolin (piirrä itsellesi merkkikaavio): Kun $0 < x < 1$, niin $f'(x) = 2x - 4 < 0$;
kun $1 < x < 2$, niin $f'(x) = -2x + 4 > 0$;
kun $2 < x < 3$, niin $f'(x) = -2x + 4 < 0$;
kun $3 < x < 7$, niin $f'(x) = 2x - 4 > 0$.

$f'-$testin ääriarvokohdille-lauseen nojalla piste $x = 1$ on funktion f oleellinen lokaali minimikohta ja $f(1) = |(1-2)^2 - 1| = 0$ on oleellinen lokaali minimiarvo. Edelleen, piste $x = 3$ on funktion f oleellinen lokaali minimikohta ja $f(3) = |(3-2)^2 - 1| = 0$ on oleellinen lokaali minimiarvo. Piste $x = 2$ on funktion f oleellinen lokaali maksimikohta ja $f(2) = |(2-2)^2 - 1| = 1$ on oleellinen

lokaali maksimiarvo.

Koska *aidon kasvavuuden lauseen* nojalla funktio f on aidosti vähenevä välillä $]0,1[$ (ja jatkuvuuden nojalla aidosti vähenevä suljetulla välillä $[0,1]$) sekä aidosti kasvava välillä $]3,7[$ (välillä $[3,7]$), ovat lokaalit minimiarvot $f(1)=0=f(3)$ samalla funktion f pienemmät arvot (voit myös huomata, että $f(x)=|(x-2)^2-1|\geq 0$ kaikilla $x\in[0,7]$).

Lokaali maksimiarvo $f(2)=1$ ei välttämättä ole suurin arvo, sillä funktio f voi saada suuremman arvon välin $[0,7]$ toisessa päätepisteessä. Tätä varten laskemme

$$f(0)=|(0-2)^2-1|=3 \quad \text{ja} \quad f(7)=|(7-2)^2-1|=24.$$

Funktion f suurin arvo on siis $f(7)=24$.

2. Määritä luku ξ, jolle $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$, kun
(a) $a=0, b=1$ ja $f(x)=\sqrt{x}$;
(b) $a=0, b=\frac{\pi}{2}$ ja $f(x)=\sin x$.
Etsi (a) kohdassa tarkka arvo ja (b) kohdassa kolmedesimaalinen likiarvo.

Ratkaisu: (a) Funktio $f\colon [0,\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, on jatkuva. Funktio f on derivoituva avoimella välillä $]0,\infty[$ ja

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x\neq 0.$$

On löydettävä luku ξ, jolla

$$f(0)-f(1)=f'(\xi)(0-1),$$

toisin sanoen tehtävämme on ratkaista yhtälö

$$\sqrt{0}-\sqrt{1}=\frac{-1}{2\sqrt{\xi}} \quad\Longleftrightarrow\quad 1=\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{\xi}=\frac{1}{2}.$$

Yhtälön ainoa ratkaisu on $\xi=\frac{1}{4}$.

(b) Funktio $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, on jatkuva. Funktio f on derivoituva ja

$$f'(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}.$$

On löydettävä luku ξ, jolla

$$f(0)-f(1)=f'(\xi)(0-1),$$

toisin sanoen tehtävämme on ratkaista yhtälö

$$\sin 0-\sin\frac{\pi}{2}=\cos\xi(0-\frac{\pi}{2}) \quad\Longleftrightarrow\quad -1=(-\frac{\pi}{2})\cos\xi \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\xi=\frac{2}{\pi}.$$

Tässä käytimme tietoa $\sin 0 = 0$ ja $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Yhtälön ratkaisut ovat $\xi = \pm\arccos(\pi/2) + n\cdot 2\pi \approx \pm 0,881 + n\cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
Tässä käytimme tietoa, että kosinifunktio on parillinen (eli $\cos(-x) = \cos x$) ja että kosinifunktion jakso on 2π (eli $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$).

Huomautus: Tämä tehtävä havainnollisti tietenkin väliarvolausetta. Molemmat tehtävämme funktiosta ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia välillä $]a, b[$, joten väliarvolause takaa meille sellaisen pisteen $\xi \in]a, b[$ olemassaolon, jolla

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b).$$

Väliarvolause on luonteeltaan *olemassaolotulos*. Olemassaolotulokset ovat hyvin tyypillisiä matematiikassa. Olemme jo tutustuneet myös esimerkiksi Weierstrassin minimi-maksimi-lauseeseen, Bolzanon lauseeseen ja Rollen lauseeseen, jotka nekin ovat tyypiltään olemassaolotuloksia. Väliarvolause takaa pisteen ξ olemassaolon muttei ota kantaa siihen, miten piste ξ voitaisiin määrätä. Tässä tehtävässä löydettiin piste $\xi = 1/4 \in]0, 1[$ (a-kohta) ja $\xi \approx 0,881 \in]0, 1[$ (b-kohta), joiden olemassaolo tiedettiin jo väliarvolauseen nojalla.

3. Oletetaan, että $f\colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]-1, 1[$ pätee, että $|f'(x)| \leq 10$. Anna esimerkki sellaisesta luvusta $\delta > 0$, että kaikilla $x, y \in]-1, 1[$ pätee: jos $|x - y| < \delta$, niin $|f(x) - f(y)| < 10^{-2006}$.

Ratkaisu: Olkoot $x, y \in]-1, 1[$ ja oletetaan, että $x < y$. Tällöin $[x, y] \subset]-1, 1[$, joten funktio f on jatkuva välillä $[x, y]$ ja derivoituva välillä $]x, y[$. Väliarvolauseen nojalla on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in]x, y[$, että

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

Tällöin

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)(y - x)| = |f'(\xi)||y - x| \leq 10|x - y|.$$

Tässä käytimme tietoa $|f'(x)| \leq 10$ kaikilla $x \in]-1, 1[$ ja tietoa $\xi \in]-1, 1[$.
Väliarvolauseen nojalla olemme siis saaneet arvion

$$|f(x) - f(y)| \leq 10|x - y|.$$

Tässä $10|x - y| < 10^{-2006} \iff |x - y| < 10^{-2006}/10 = 10^{-2007}$.

Valitaan siis $\delta = 10^{-2007} > 0$ ja oletetaan, että $|x - y| < \delta$. Tällöin yllä olevan nojalla

$$|f(x) - f(y)| \leq 10|x - y| < 10 \cdot \delta = 10^{-2006}.$$

Lisätieto: Tässä tehtävässä on kyse funktion niin sanotusta *tasaisesta jatkuvuudesta*. Sitä opiskelemme tarkemmin kevään kurssilla. Tällä kurssilla olemme tarkastelleet jatkuvia funktioita. Muistamme, että funktion jatkuvuus määritellään *pisteittäin*: funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että aina kun $0 < |x - x_0| < \delta$, niin $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Tasainen jatkuvuus puolestaan määritellään *välillä*: funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että aina kun $x, y \in [a, b]$ ja $0 < |x - y| < \delta$, niin $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Tasainen jatkuvuus on pisteittäistä jatkuvuutta vahvempi ominaisuus.

4. Osoita tarkasti, ettei funktio f on derivoituva kohdassa $x = 0$, jos $f(0) = 0$ ja $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$.
Mieti tämän perusteella pitääkö seuraava (epätäsmällisesti muotoiltu) väite paikkaansa: jos jatkuva funktio f ei ole derivoituva kohdassa x_0, niin sen kuvaajassa on tässä kohtaa "taitos" tai "piikki" tai "kuvaaja on pystysuorassa".

Ratkaisu: Tarkastelemme siis funktiota $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0. \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

Derivaatan määritelmän mukaan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Haluamme osoittaa, että derivaattaa ei ole olemassa pisteessä $x = 0$. Lähdemme tutkimaan erotusosamäärää: olkoon $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Tällöin

$$\frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \sin \frac{1}{h}.$$

Haluamme siis osoittaa, että ei ole olemassa raja-arvoa $\lim\limits_{h \to 0} \sin \frac{1}{h}$. Tähän on useitakin tapoja. Vertaa tässä esitettävää ratkaisua Harjoituksen 7 tehtävän 4 ratkaisuun!

Tehtään **vastaoletus eli antiteesi**: on olemassa raja-arvo $\lim\limits_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} = a$. Raja-arvon määritelmän mukaan jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on silloin olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että aina, kun $0 < |h - 0| < \delta$, niin $|\sin \frac{1}{h} - a| < \varepsilon$. Erityisesti, kun $\varepsilon = \frac{1}{3}$, niin löytyy sellainen $\delta > 0$, että

$$\left| \sin \frac{1}{h} - a \right| < \frac{1}{3}$$

aina, kun $0 < |h| < \delta$.

Valitaan luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{2n\pi} < \delta$ (siis, $n > 1/(2\pi\delta)$) ja luonnollinen luku $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{2}{\pi + 4m\pi} < \delta$ (siis, $m > (\frac{2}{\delta} - \pi)/(4\pi)$).

Merkitään $h_1 = \frac{1}{2n\pi}$ ja $h_2 = \frac{2}{\pi+4m\pi}$. Nyt siis $0 < h_1, h_2 < \delta$. Antiteesin nojalla pätee siis

$$\left|\sin\frac{1}{h_1} - a\right| < \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad \left|\sin\frac{1}{h_2} - a\right| < \frac{1}{3}.$$

Tiedämme, että

$$\sin\frac{1}{h_1} = \sin(2n\pi) = 0$$

ja

$$\sin\frac{1}{h_2} = \sin\frac{\pi + 4m\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = 1.$$

Nyt kolmioepäyhtälön ja antiteesin (AT) nojalla

$$1 = \left|\sin\frac{1}{h_1} - \sin\frac{1}{h_2}\right| = \left|\sin\frac{1}{h_1} - a + a - \sin\frac{1}{h_2}\right| \overset{\Delta-ey}{\leq} \left|\sin\frac{1}{h_1} - a\right| + \left|a - \sin\frac{1}{h_2}\right| \overset{\text{AT}}{<} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Tämä on ristiriita. Antiteesi on siis väärä. Ei ole olemassa raja-arvoa $\lim\limits_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$.
Funktio f ei siis ole derivoituva origossa.

Huomautus: Funktio f on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä. Jatkuvuus muualla kuin origossa on selvää, sillä siellä f on jatkuvien funktioiden yhdisteenä ja tulona jatkuva. Jatkuvuus origossa edellyttää, että

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Osoitetaan, että näin on: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon > 0$ ja oletetaan, että $0 < |x - 0| = |x| < \delta$. Tällöin

$$|f(x) - f(0)| = \left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

Tässä käytimme tietoa, että $|\sin x| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
Siis funktio f on jatkuva myös origossa.

Tehtävässä esiintyvää funktiota $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ kutsutaan usein *topologin sinikäyräksi.*