MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi
Ohajus 4 ratkaisuehdotuksia
29. 9. 2008 alkavalle viikolle
Rami Luisto

1. Selvitä lauseen 4.7 avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n+7}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Muista lauseen "jos, niin" -rakenne! Tehtävässä saa pitää tunnettuna, että $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$.

Ratkaisu:

Huomataan aluksi:

$$\frac{n^2+5n+7}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3})}{n(1+\frac{1}{n})n(1+\frac{2}{n})n(1+\frac{3}{n})} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}$$

Tätä pidemmälle emme valitettavasti pääse enää "lukiotyylillä"; ympyröimällä muotoa $\frac{1}{n^k}$ ja piirtämällä nuolia kohti äärettömyyttä, vaan asia pitää todistaa. Otamme käyttöön lauseen 4.7.

(i) Tiedämme, että lukujono $\frac{1}{n} \to 0$, joten lauseen 4.7.(3) perusteella saamme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} * \frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) * \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0 * 0 = 0$$

Ja käyttämällä lausetta uudelleen vastaavasti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} * \frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right) * \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0 * 0 = 0$$

Näppärällä induktiolla ja lauseella 4.7. saisimme siis helposti todistettua että $\frac{1}{n^k} \to 0$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

(ii) Käytämme nyt tietoja äskeisestä kohdasta, tietoa vakiojonon suppenemisesta sekä lauseen 4.7. kohtia (1) ja (2):

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}) = \left(\lim_{n\to\infty} 1\right) + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 1+0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n}) = \left(\lim_{n\to\infty} 1\right) + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} 1\right) + 2\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 1+2*0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n}) = \left(\lim_{n\to\infty} 1\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} 1\right)+3\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = 1+3*0 = 1$$

Vastaavasti saamme:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right) = 1*0+5*0+7*0 = 0.$$

(iii) Hyödyntämällä äskeistä kohtaa ja vielä kerran lauseen 4.7. kohtaa (3) huomaamme, että:

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})\right) = 1*1*1 = 1.$$

Viimein pääsemme tilanteeseen, jossa meillä on kaksi lukujonoa, joista toisen jäsenet ja raja-arvot ovat positiivisia kaikilla n, joten voimme käyttää lauseen 4.7. kohtaa (4), jonka mukaan viimein

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})} = \frac{0}{1} = 0$$

2. Oletetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

Tämän voi tehdä (ainakin) kahdella tavalla:
1) tarkastellen erikseen tapauksia $a < 0$, $a = 0$ ja $a > 0$; ja
2) kolmioepäyhtälön "vasemman puolen" avulla (- löytyy monisteesta.)

Ratkaisu:

1) Tutkitaan eri tapauksia:

$(a = 0)$:
Jos $a = 0$, niin huomaamme, että $||x_n| - |a|| = ||x_n| - 0| = |x_n| = |x_n - 0|$, eli väite on identtinen tiedon $x_n \to 0$ kanssa.

$(a > 0)$:
Nyt koska $x_n \to a > 0$, niin voimme valitsemalla $\epsilon = a > 0$ löytää sellaisen n_0, että $x_n > 0$ aina kun $n > n_0$.

(Eli: $|x_n - a| < a \Leftrightarrow [-a < x_n - a < a \quad \| + a] \Rightarrow [0 < x_n(< 2a))$.]

Nyt siis päättelymme palautuu tietojen $x_n > 0$ ja $a > 0$ perusteella alkuperäisen jonon suppenemiseen, sillä:

$$||x_n| - |a|| = |x_n - a|.$$

$(a < 0)$:
Kuten äsken, voimme valita sellaisen n_0, että $x_n < 0$ kaikilla $n > n_0$. Väite $|x_n| \to |a|$ muuttuu siis tässä tapauksessa väitteeksi $-x_n \to -a$, eli $(-1) * x_n \to (-1) * a$, joka seuraa suoraan oletuksista yhdistettynä monisteen lauseeseen 4.7.

2) Monisteen mukaan reaalilukujen itseisarvolle pätee: $||x| - |y|| \leq |x - y|$, joten olkoon $\epsilon > 0$ ja n_0 sellainen, että $|x_n - a| < \epsilon$ aina kun $n > n_0$. Olkoon vielä $n > n_0$. Nyt saamme:

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \epsilon,$$

Joten $|x_n| \to a$.

(Olikohan hieman helpompaa kuin ratkaisu kolmessa eri erikoistapauksessa? Opetelkaa rakastamaan kolmioepäyhtälöä eri muotoineen.)

3. Oletetaan, että eräällä luvulla $r > 0$ pätee kaikille n, että $x_n \geq r$. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

(Lisäkysymys jälkeen päin pohdittavaksi: voiko luvusta r luopua?)

Ratkaisu:

Koska $x_n \geq r > 0$, niin epäyhtälön säilymisen perusteella $a \geq r > 0$, joten erityisesti
$\sqrt{x_n} + \sqrt{a} > 0$ kaikilla n, ja:

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| =^* \left| \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{a})(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right| = |(x_n - r)| \left| \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right|.$$

Tässä kohtaa tarvitsemme enää huomion $\sqrt{x_n} + \sqrt{a} \geq \sqrt{r} + \sqrt{a}$, sillä $x_n \geq r$ kaikilla n, ja jos nyt valitsemme tiedon $(x_n) \to a$ perusteella luvun n_0 siten, että $|x_n - a| <^* \epsilon(\sqrt{r} + \sqrt{a})$ aina kun $n > n_0$, niin:

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = |(x_n - r)| \left| \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right| < \epsilon(\sqrt{r} + \sqrt{a}) \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \epsilon(\sqrt{x_n} + \sqrt{a}) \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} = \epsilon.$$

Joten

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

*(Tarvitsimme siis tietoa $\sqrt{x_n} + \sqrt{a} > 0$ sekä tarpeessamme laventaa itseisarvoepäyhtälössä, että epäsuorasti käyttäessämme tietojamme aiheesta

$x_n \to a$, sillä ilman aidosti positiivista r olisimme voineet joutua tilanteeseen $\sqrt{r}+\sqrt{a} = 0$, ja olisimme saattaneet epähuomiossa yrittää valita sellaista n_0, että $|x_n - a| < \epsilon(\sqrt{x_n} + \sqrt{a}) = \epsilon * 0 = 0$, joka olisi ollut hankalaa, ellei peräti mahdotonta.).

Lisäkysymykseen pohdintaa:

Pohditaan tilannetta, jossa meillä ei löydy sellaiste $r > 0$, että $x_n \geq r$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. (Olettakaamme, että $x_n \geq 0$, jotta kysymys "neliöjuurijonon" suppenemisesta olisi mielekäs). Eli toisin sanoen, valitaanpa miten pieni $r > 0$ (voisimme merkitä luvun r sijasta vaikkapa ϵ, 'vink' 'vink.)' tahansa, niin löytyy sellainen n, että $x_n < r$. Koska jonon jäsenet ovat epänegatiivisia, voimme kirjoittaa, tämän muodossa:

Kaikilla $r > 0$ on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $|x_n - 0| < r$. Tämä yhdistettynä tietoon jonon suppenemisesta tarkoittaa, että pakosti $x_n \to 0$.

Valitkaamme nyt jonon suppenemisen perusteella sellainen n_0, että $|x_n - a| = |x_n - 0| < \epsilon^2$ aina kun $n > n_0$. Nyt siis:

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n} <^1 \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon.$$

Siis jono suppenee, sillä teimme päättelyn mielivaltaisella $\epsilon > 0$.

Huomautuksia:
1: $0 < x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$.

4. Osaatko todistaa, että seuraava jono suppenee:

$$1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots ?$$

(Tehtävässä on itse asiassa kyse kurssin analyysi II sarjateorian osaan kuuluvasta Leibnizin lauseesta.) Tehtävää voi lähestyä esim. tarkastelemalla ensin jonoja $x_1, x_3, \ldots$ ja $x_2, x_4, \ldots$.

Ratkaisu:

Ruvetaan vinkin mukaan tarkastelemaan jonoja $y_n := x_{2n-1}$, eli jonon (x_n) indeksiltään parittomat jäsenet ja $z_n := x_{2n}$, eli vastaavasti indeksiltää parilliset jonon (x_n) jäsenet.

Huomataan jonosta (y_n):

$$1, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \ldots$$

$$= 1, 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}), 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}), \ldots,$$

eli lukujonon seuraava jäsen on aina edellinen miinus eräs positiivinen luku. Yleisemmin siin huomataan:

$$y_{n+1} = y_n - (\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}),$$

missä $(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}) > 0$ kaikilla $n > 0$, joten siis

$$y_{n+1} = y_n - (\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}) \leq y_n + 0 = y_n,$$

eli jono (y_n) on siis laskeva.

Vastaavalla tavalla huomaamme, että itse asiassa

$$z_{n+1} = z_n + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) \geq z_n + 0 = z_n,$$

koska $(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) > 0$, ja siten (z_n) on nouseva.

Lisäämme tietouttamme vielä huomaamalla, että itse asiassa $z_n = y_n - \frac{1}{2n}$, eli itse asiassa $z_n \leq y_n$ kaikilla n. Tämän viikon laskuharjoitustehtävien nojalla tämä tarkoittaa, että $(z_n) \to z_0$ ja $(y_n) \to y_0$. Käyttämällä ylläolevaa yhtälöä saamme helposti osoitettua, että itse asiassa $y_0 = z_0$, sillä jos $z_n = y_n - \frac{1}{2n}$, niin $|z_n - y_n| = \frac{1}{2n}$. Joten koska $(y_n) \to y_0$, niin $|y_n - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$, kun $n > n'$, niin olkoon $n_0 > \max(n', \frac{1}{\epsilon})$, jolloin:

$$|z_n - y_0| = |z_n - y_n + y_n - y_0| \leq |z_n - y_n| + |y_n - y_0| = \frac{1}{2n} + |y_n - y_0| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

Tämä päti mielivaltaisella $\epsilon > 0$, joten $(z_n) \to y_0$, ja raja-arvon yksikäsitteisyyden perusteella $z_0 = y_0$.

Tässä vaiheessa huomaamme, että voimme kirjoittaa jonon (x_n) muotoon:

$$x_n = \begin{cases} y_{(n+1)/2} & \text{jos } n \text{ pariton} \\ z_{n/2} & \text{jos } n \text{ parillinen.} \end{cases}$$

Eli suomeksi sanottuna järjestelemme paloittelemamme jonon takaisin alkuperäiseen muotoonsa. Paloittelumme jälkeen tiedämme kuitenkin, että jos valitsemme sellaisen luvun n_0, että $|z_n - z_0| < \epsilon$, kun $n > 2n_0 + 2$ ja sellaisen n_1, että $|y_n - z_0| < \epsilon$, kun $n > 2n_1$ (Kertoimet ja muut oudot härpäkkeet johtuvat tavastamme määritellä (x_n) tässä yhteydessä jonojen (y_n) ja (x_n) avulla.), niin valitessamme $n' = \max(n_0, n_1)$, pätee $|x_n - z_0| < \epsilon$ kaikilla parillisilla tai parittomilla luvuilla $n > n'$, eli kaikilla $n > n'$.

Eli jono suppenee.