MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 7 ratkaisu ehdotuksia (AH)

TEHTÄVÄ 1. Oletetaan, että $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$, eli määritelmän nojalla kaikille $\epsilon > 0$ voimme valita sellaisen $\hat{\delta}_\epsilon > 0$, että $|f(y) - 7| < \epsilon$, kun $0 < |y-2| < \hat{\delta}_\epsilon$. Olkoon $y = 2x$, jolloin

$$|f(2x) - 7| < \epsilon, \quad \text{kun} \quad 0 < |2x-2| < \hat{\delta}_\epsilon.$$

Lisäksi

$$0 < |2x-2| < \hat{\delta}_\epsilon \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2}|2x-2| < \frac{\hat{\delta}_\epsilon}{2} \Leftrightarrow 0 < |x-1| < \frac{\hat{\delta}_\epsilon}{2}.$$

Tämän perusteella kaikille $\epsilon > 0$ voidaan valita $\delta_\epsilon = \hat{\delta}_\epsilon/2 > 0$ jotka toteuttavat

$$|f(2x) - 7| < \epsilon, \quad \text{kun} \quad 0 < |x-1| < \delta_\epsilon,$$

eli määritelmän perusteella $\lim_{x\to 1} f(2x) = 7$.

TEHTÄVÄ 2. Tavoitteena on tutkia f:n oikeanpuoleista raja-arvoa pisteessä 1, jolloin voidaan valita f:lle esimerkiksi seuraava määrittelyjoukko:

$$f: \ (1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

Tässä määrittelyjoukossa f on aidosti positiivinen. Tarkastellaan aluksi tilannetta $x \in (1,2)$, jolloin

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)} > \frac{1}{3(x-1)}.$$

Olkoon sitten $M > 0$ reaaliluku, $x \in (1, 1+\delta_M)$ ja $\delta_M = \min(1, 1/3M)$. Nyt siis $x - 1 \in (0, \delta_M)$ eli erityisesti $x - 1 < 1/3M$. Näillä valinnoilla siis pätee

$$f(x) > \frac{1}{3(x-1)} > \frac{1}{3(\frac{1}{3M})} = M.$$

Olkoon nyt $M' \leq 0$. Koska f on määrittelyjoukossaan aidosti positiivinen, voidaan valita mikä hyvänsä reaaliluku $\delta_{M'} > 0$ siten, että jos $x \in (1, 1+\delta_{M'})$, niin

$$f(x) > 0 \geq M.$$

Tämä on määritelmän perusteella yhtäpitävää sen kanssa, että $\lim_{x\to 1+} 1/(x^2-1) = \infty$.

TEHTÄVÄ 3. [Lause 5.6, s. 36, Hurri-Syrjänen (1999)]. Funktiolle f on voimassa

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0-} f(x) = a = \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Todistus. Suunta $\Rightarrow$: Määritelmän perusteella kaikille $\epsilon > 0$ löytyy sellainen δ_ϵ, että $|f(x) - a| < \epsilon$ aina kun $0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon$. Käyttäen itseisarvolemmaa huomataan, että seuraavat joukot ovat samat:

$$\begin{aligned}\{x : 0 < |x-x_0| < \delta_\epsilon\} &= \{x : x \neq x_0 \quad \text{ja} \quad |x-x_0| < \delta_\epsilon\} \\ &= \{x : x \neq x_0 \quad \text{ja} \quad x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0 + \delta_\epsilon\} \\ &= (x_0 - \delta_\epsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_\epsilon).\end{aligned}$$

Mielivaltaiselle $\epsilon > 0$ pätee siis $|f(x) - a| < \epsilon$ kun x kuuluu joukkoon $(x_0 - \delta_\epsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_\epsilon)$. Tällöin $|f(x) - a| < \epsilon$ toteutuu myös kun $x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0)$ ja kun $x \in (x_0, x_0 + \delta_\epsilon)$. Toisin sanoen

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a = \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Suunta $\Leftarrow$: Kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta_{1,\epsilon} > 0$, että

$$|f(x) - a| < \epsilon, \qquad \text{kun} \qquad x \in (x_0 - \delta_{1,\epsilon}, x_0).$$

Lisäksi on olemassa sellainen $\delta_{2,\epsilon} > 0$, että

$$|f(x) - a| < \epsilon, \qquad \text{kun} \qquad x \in (x_0, x_0 + \delta_{2,\epsilon}).$$

Valitsemme $\delta_\epsilon = \min\{\delta_{1,\epsilon}, \delta_{2,\epsilon}\}$. Jos $x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_\epsilon)$, niin $x \in (x_0 - \delta_{1,\epsilon}, x_0)$ tai $x \in (x_0, x_0 + \delta_{2,\epsilon})$ ja siis mielivaltaiselle $\epsilon > 0$:

$$|f(x) - a| < \epsilon, \qquad \text{kun} \qquad x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_\epsilon).$$

Toisin sanoen $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

TEHTÄVÄ 4. [Lemma 5.7, s. 37, Hurri-Syrjänen (1999)]. Olkoon $f(x) > 0$ kaikilla x. Silloin

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty,$$

jossa α voi olla tyyppiä $x_0, x_0+, x_0-, \infty, -\infty$.

Huomautus: Jos halutaan todistaa, että eräällä funktiolla $g(x)$ on ominaisuus $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \infty$, niin riittää todistaa, että mielivaltaiselle $M > 0$ voidaan löytää määritelmään sopiva joukko x:n arvoja (riippuen α:n tyypistä, katso (1)) siten, että kyseisillä x pätee $g(x) > M$. Jos nimittäin eräässä joukossa $g(x) > 1$, niin on myös selvää että tässä joukossa $g(x) > M'$ jokaisella $M' \leq 0$.

Todistus. Todistus on periaatteelta sama olipa α mikä tahansa edellä annetuista vaihtoehdoista. Käsittelemme kaikki yhtäaikaisesti. Koska $f(x) > 0$, niin $|f(x)| = f(x)$ kaikilla x. Oletetaan, että $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$ ja α on jokin symboleista $x_0, x_0+, x_0-, \infty, -\infty$. Määritelmien perusteella: Jos $\epsilon > 0$ on mielivaltainen voidaan valita sellainen r_ϵ, että $f(x) = |f(x) - 0| < \epsilon$, kun

$$\begin{aligned}
&x \in (x_0 - r_\epsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + r_\epsilon) \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = x_0),\\
&x \in (x_0 - r_\epsilon, x_0) \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = x_0-),\\
&x \in (x_0, x_0 + r_\epsilon) \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = x_0+),\\
&x > r_\epsilon \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = \infty),\\
&x < r_\epsilon \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = -\infty).
\end{aligned} \tag{1}$$

Lisäksi tapauksissa $\alpha = x_0$, $\alpha = x_0-$ ja $\alpha = x_0+$ on oltava $r_\epsilon > 0$.

Koska $f(x) \neq 0$ kaikilla x, niin

$$f(x) < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\epsilon}.$$

Olkoon $M > 0$ mielivaltainen. Asetetaan $\epsilon = 1/M > 0$, jolloin

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{(\frac{1}{M})} = M,$$

kun

$$\begin{aligned}
&x \in (x_0 - r_{1/M}, x_0) \cup (x_0, x_0 + r_{1/M}) \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = x_0),\\
&x \in (x_0 - r_{1/M}, x_0) \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = x_0-),\\
&x \in (x_0, x_0 + r_{1/M}) \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = x_0+),\\
&x > r_{1/M} \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = \infty),\\
&x < r_{1/M} \qquad (\text{tapaus} \qquad \alpha = -\infty).
\end{aligned}$$

Määritelmien perusteella: $\lim_{x \to \alpha} 1/f(x) = \infty$.

Olkoon sitten $\lim_{x\to\alpha} 1/f(x) = \infty$, ja α kuten edellä. Jos $M \in \mathbb{R}$ niin on olemassa sellainen s_M, että $1/|f(x)| = 1/f(x) > M$, kun

$$\begin{aligned}
&x \in (x_0 - s_M, x_0) \cup (x_0, x_0 + s_M) \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = x_0),\\
&x \in (x_0 - s_M, x_0) \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = x_0-),\\
&x \in (x_0, x_0 + s_M) \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = x_0+),\\
&x > s_M \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = \infty),\\
&x < s_M \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = -\infty).
\end{aligned}$$

Tapauksissa $\alpha = x_0$, $\alpha = x_0-$ ja $\alpha = x_0+$ on oltava $s_M > 0$.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja valitaan $M = 1/\epsilon > 0$, jolloin nähdään, että

$$\frac{1}{|f(x)|} > M = \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow |f(x)| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 0| < \epsilon,$$

kun

$$\begin{aligned}
&x \in (x_0 - s_{1/\epsilon}, x_0) \cup (x_0, x_0 + s_{1/\epsilon}) \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = x_0),\\
&x \in (x_0 - s_{1/\epsilon}, x_0) \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = x_0-),\\
&x \in (x_0, x_0 + s_{1/\epsilon}) \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = x_0+),\\
&x > s_{1/\epsilon} \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = \infty),\\
&x < s_{1/\epsilon} \quad (\text{tapaus} \quad \alpha = -\infty).
\end{aligned}$$

Määritelmien perusteella: $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$.