MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 5 / Ratkaisuehdotuksia (AK), 3 sivua
6. 10. 2008 alkavalle viikolle

1. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty.$$

Ratkaisu: Olkoon $M \in \mathbb{R}$. On osoitettava, että löytyy sellainen luonnollinen luku n_M, josta alkaen jokainen lukujonon $(n^2 - n)$ jäsen on suurempi kuin luku M. Valitaan luonnollinen luku n_M niin, että $n_M > M + 1$. Olkoon $n > n_M$. Tällöin

$$n^2 - n = n(n-1) \overset{(*)}{\geq} n - 1 > n_M - 1 > M + 1 - 1 = M,$$

missä arvio $(*)$ seuraa siitä, että $n \geq 1$ ja $n - 1 > 0$. Näin on osoitettu, että $\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty$.

2. Osoita, että

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1} = 3.$$

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. On osoitettava, että löytyy sellainen positiivinen luku δ_ε, että jokaisella muuttujan x arvolla, joka toteuttaa ehdon $0 < |x-2| < \delta_\varepsilon$ pätee, että lausekkeen $\frac{x+1}{x-1}$ arvo poikkeaa luvusta 3 vähemmän kuin luvun ε verran. Valitaan $\delta_\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\} > 0$. Olkoon $0 < |x-2| < \delta_\varepsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+1}{x-1} - 3\right| &= \left|\frac{x+1-3(x-1)}{x-1}\right| = \left|\frac{-2x+4}{x-1}\right| = \frac{|-2||x-2|}{|x-1|} \\ &= \frac{2|x-2|}{|x-1|} \overset{(1)}{<} 4|x-2| \overset{(2)}{<} 4\,\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Perusteluja:

(1) $|x-2| < \delta_\varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$, joten Itseisarvolemman nojalla $-\dfrac{1}{2} < x - 2 < \dfrac{1}{2}$.

Lisäämällä epäyhtälöiden molemmille puolille luku 1 saadaan $\dfrac{1}{2} < x - 1 < \dfrac{3}{2}$.

Siis $|x-1| = x - 1 > \dfrac{1}{2}$, joten $\dfrac{1}{|x-1|} < 2$.

(2) $|x-2| < \delta_\varepsilon \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Näin on osoitettu, että $\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1} = 3$.

3. Määritellään $f(x) = x^2 + 3x$. Osoita, että

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 7.$$

Osaatko tulkita tuloksen derivaattana?

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Olkoon $h \in \mathbb{R}$ ja oletetaan, että $0 < |h - 0| < \delta_\varepsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(2+h)-f(2)}{h} - 7\right| &= \left|\frac{(2+h)^2 + 3(2+h) - (4+6)}{h} - 7\right| \\ &= \left|\frac{4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 10 - 7h}{h}\right| \\ &= \left|\frac{h^2}{h}\right| = |h| < \delta_\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Näin on osoitettu, että $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 7$.

Tehtävässä esiintyvää lauseketta, jossa osoittajassa on funktion f arvojen erotus $f(2+h)-f(2)$ ja nimittäjässä vastaavien muuttujan arvojen erotus $2+h-2 = h$, kutsutaan funktion f *erotusosamääräksi kohdassa* 2. Myöhemmin *määrittelemme*, että erotusosamäärän raja-arvo, kun muuttujan arvojen erotus h menee nollaan (mikäli sellainen on olemassa) on funktion derivaatta. Tehtävässä tulimme siis laskeneeksi $f'(2)$. Koulussa opittujen derivointisääntöjen nojalla $f'(x) = 2x + 3$. Funktion f derivaatta kohdassa $x = 2$ on silloin $f'(2) = 7$. Samaan arvoon pääsemme joko laskemalla raja-arvon tai käyttämällä derivointisääntöä:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 7.$$

4. Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to 7$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $x_n + y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Vihje: $y_n > 6$ kun n on kyllin suuri.

Ratkaisu: Olkoon $M > 0$. Oletuksen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ nojalla on olemassa sellainen luonnollinen luku n_M, että aina kun $n > n_M$, niin pätee $x_n > M$. Valitaan $\varepsilon = 1$. Oletuksen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 7$ nojalla on olemassa sellainen luonnollinen luku n_1, että aina kun $n > n_1$, niin pätee $|y_n - 7| < 1$. Itseisarvolemman nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\begin{aligned} -1 < y_n - 7 < 1 \quad &\text{aina, kun } n > n_1 \quad \iff \\ 6 < y_n < 8 \quad &\text{aina, kun } n > n_1 \quad . \end{aligned}$$

Valitaan nyt luonnollinen luku $N = \max\{n_1, n_M\}$. Olkoon $n > N$. Tällöin

$$x_n + y_n \overset{(1)}{>} x_n + 6 \overset{(2)}{>} M + 6 > M.$$

Perusteluja:

$$\begin{aligned} &(1) \quad n > N \geq n_1, \text{ joten } y_n > 6. \\ &(2) \quad n > N \geq n_M, \text{ joten } x_n > M. \end{aligned}$$

Näin on osoitettu, että $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$.

Varoituksen sana: Perusteluna emme voi käyttää luentomonisteen Lausetta 4.7(1) eli tulosta, jonka mukaan summan raja-arvo voidaan laskea termeittäin. Syy: Lauseessa 4.7 oletuksena on, että kaikki raja-arvot ovat äärellisiä (eli jonot suppenevat); nyt toinen jonoista ei suppenee vaan hajaantuu (kasvaa rajatta).