MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 1 ratkaisu ehdotuksia (AH)

TEHTÄVÄ 1. Oletetaan ensiksi, että $|x - e^{\pi}| < 2^{-1}10^{-1}$. Sovelletaan itseisarvolemmaa, jonka mukaan tämä on yhtäpitävää epäyhtälöiden

$$-2^{-1}10^{-1} < x - e^{\pi} < 2^{-1}10^{-1}$$

kanssa. Lisätään e^{π} epäyhtälöihin, jolloin saadaan yhtäpitävät epäyhtälöt

$$-2^{-1}10^{-1} + e^{\pi} < x < 2^{-1}10^{-1} + e^{\pi}.$$

Koska $2^{-1}10^{-1} = 0,05$ niin käyttämällä e^{π}:n desimaalikehitelmää huomataan

$$23.09 < -2^{-1}10^{-1} + e^{\pi} < x < 2^{-1}10^{-1} + e^{\pi} < 23.20$$

eli $23.09 < x < 23.20$. Nyt siis tiedetään ainakin, että x:n desimaalikehitelmä alkaa luvulla 23.

Toistaalta

$$-2^{-1}10^{-1} + e^{\pi} < 23.091 < 2^{-1}10^{-1} + e^{\pi} \quad \text{ja} \quad -2^{-1}10^{-1} + e^{\pi} < 23.190 < 2^{-1}10^{-1} + e^{\pi}.$$

Eli emme pysty tarkentamaan desimaalikehitelmää kolmannella luvulla, sillä epäyhtälön $|x - e^{\pi}| < 2^{-1}10^{-1}$ toteuttaa sekä $x = 23.091$ että $x = 23.190$.

Olkoon $|x - e^{\pi}| < 2^{-1}10^{-23}$. Itseisarvolemmasta seuraa

$$-2^{-1}10^{-23} + e^{\pi} < x < 2^{-1}10^{-23} + e^{\pi}.$$

Nyt huomataan että $2^{-1}10^{-23} = 5 \cdot 10^{-24}$ (tämä on siis luku, jonka desimaalikehitelmä on $0,\overbrace{00\ldots0}^{\times 23}5$). Sijoittamalla tämä e^{π}:n desimaalikehitelmään huomataan

$$23.1406926327792690057290\hat{8}13 < -2^{-1}10^{-23} + e^{\pi} < x < 2^{-1}10^{-23} + e^{\pi} < 23.1406926327792690057290\hat{9}14$$

Nyt siis tiedetään

$$23.1406926327792690057290\hat{8}13 < x < 23.1406926327792690057290\hat{9}14,$$

jonka perusteella on mahdollista määrätä ainakin 24 ensimmäistä lukua x:n desimaalikehitelmästä.

Luvun x 25:n desimaalin määrittäminen ei ole mahdollista. Esimerkiksi

$$-2^{-1}10^{-23} + e^{\pi} < 23.1406926327792690057290\hat{8}2 < 2^{-1}10^{-23} + e^{\pi}$$

ja

$$-2^{-1}10^{-23} + e^{\pi} < 23.1406926327792690057290\hat{9}1 < 2^{-1}10^{-23} + e^{\pi}$$

eli itseisarvolemman nojalla ei voi määrätä 25:ttä desimaalia sillä se on edellisissä esimerkeissä eri luku (8 ja 9).

TEHTÄVÄ 2. Jos $|3x - 2| < 1$ niin itseisarvolemman perusteella tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$-1 < 3x - 2 < 1.$$

Voimme lisätä luvun 2 epäyhtälöihin, jolloin saadaan yhtäpitävästi

$$1 < 3x < 3.$$

Nämä epäyhtälöt ovat puolestaan yhtäpitäviä epäyhtäläketjun

$$\frac{1}{3} < x < 1$$

kanssa. Tämä nähdään kertomalla luvulla $1/3 > 0$.

TEHTÄVÄ 3. Itseisarvon tarkka määritelmä on

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x \leq 0 \end{cases}$$

a) Todistetaan tapaukset $x \geq 0$ ja $x < 0$ erikseen. Jos $x \geq 0$,niin $|x| = x \geq 0$. Jos $x < 0$, niin $-x > 0$, joten varmasti $-x \geq 0$. Nyt nähdään $|x| = -x \geq 0$. Eli molemmissa tapauksissa väite on tosi.

b) Todistetaan tapaukset $x \geq 0$ ja $x < 0$ erikseen. Jos $x \geq 0$,niin $-x \leq 0$ ja määritelmän perusteella:

$$|-x| = -(-x) = x = |x|.$$

Jos $x < 0$ niin $-x \geq 0$ ja

$$|-x| = -x = |x|.$$

c) Seurataan tehtävän ohjetta ja tarkastetaan kaikki 9 vaihtoehtoa:

1. Jos $x = 0$ ja $y = 0$ niin
$$|xy| = |0 \cdot 0| = |0| = 0 = 0 \cdot 0 = |0||0| = |x||y|.$$
2. Jos $x = 0$ ja $y > 0$ niin
$$|xy| = |0 \cdot y| = |0| = 0 = 0 \cdot y = |0||y| = |x||y|.$$
3. Tapaus $y = 0$ ja $x > 0$ todistetaan samalla tavalla kuin 2.
4. Jos $x = 0$ ja $y < 0$ niin
$$|xy| = |0 \cdot y| = |0| = 0 = 0 \cdot (-y) = |0||y| = |x||y|.$$
5. Tapaus $y = 0$ ja $x < 0$ todistetaan samalla tavalla kuin 4.
6. Jos $x > 0$ ja $y > 0$ niin $xy > 0$ ja
$$|xy| = xy = |x||y|.$$
7. Jos $x > 0$ ja $y < 0$ niin $xy < 0$ ja
$$|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x||y|.$$
8. Jos $x < 0$ ja $y > 0$ niin $xy < 0$ ja
$$|xy| = -xy = (-x) \cdot y = |x||y|.$$
9. Jos $x < 0$ ja $y < 0$ niin $xy > 0$ ja
$$|xy| = xy = (-x) \cdot (-y) = |x||y|.$$

TEHTÄVÄ 4. a) Polynomien kertolasku antaa

$$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1,$$

joten väite on tosi.

b) Käyttämällä a) kohdan tulosta nähdään

$$|x^5 - 1| = |(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)| = |x-1||x^4 + x^3 + x^2 + x + 1|.$$

Jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa tehtävän 3. kohdasta c). On siis löydettävä K, joka toteuttaa epäyhtälön

$$|x-1|(x^4+x^3+x^2+x+1) \leq K|x-1|,$$

Yllä on myös käytetty tietoa $(x^4+x^3+x^2+x+1) > 0$, kun $x \in]1/2, 3/2[$, eli itseisarvomerkit on voitu jättää pois.

Käytämme seuraavaa järjestysrelaatioon liittyvää tulosta: Jos $0 < x < y$ niin $x^n < y^n$, kun $n \in \mathbb{N}$. Jos siis $x \in]1/2, 3/2[$, niin $x^n < (3/2)^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tästä voidaan päätellä, että kaikilla $x \in]1/2, 3/2[$ on voimassa

$$x^4+x^3+x^2+x+1 < (3/2)^4+(3/2)^3+(3/2)^2+(3/2)+1 = \frac{211}{16}$$

josta seuraa

$$|x-1|(x^4+x^3+x^2+x+1) \leq \frac{211}{16}|x-1|.$$

Huomaa, että edellisessä epäyhtälössä ei voida korvata symbolia $\leq$ symbolilla $<$, sillä tapaus $x=1$ on otettava huomioon. Voimme siis valita $K = 211/16$ tai minkä tahansa sitä suuremman luvun.

c) Tarkastellaan ensiksi tilannetta $|x-1| < 1$ joka on itseisarvolemman mukaan yhtäpitävää sen kanssa, että $0 < x < 2$. Nyt huomataan, että jos $0 < x < 2$ niin

$$x^4+x^3+x^2+x+1 < 2^4+2^3+2^2+2+1 = 31.$$

Valitaan sitten $h = 7^{-77777}/31 > 0$ eli tarkastellaan x:n arvoja $|x-1| < 7^{-77777}/31$. Koska $7^{-77777}/31 < 1$ niin kaikilla $|x-1| < h$ pätee myös varmasti $x^4+x^3+x^2+x+1 < 31$. Tästä seuraa, että kaikilla $|x-1| < h$ on voimassa

$$|x^5-1| = |x-1|(x^4+x^3+x^2+x+1) < 31|x-1| < 31\frac{7^{-77777}}{31} = 7^{-77777}.$$

Eli $h = 7^{-77777}/31 > 0$ kelpaa.