MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 7 / Ratkaisuehdotuksia (AK), 5 sivua
3. 11. 2008 alkavalle viikolle

1. Selvitä lauseen 5.4 avulla

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2+5x}{7x^2+9}.$$

Ratkaisu: Käytämme seuraavia tietoja

(1) Vakiofunktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\colon (x\mapsto a), a\in\mathbb{R},$ raja-arvo $\lim_{x\to x_0} f(x) = a\ , x_0\in\mathbb{R}$

(2) $\lim_{x\to x_0} x = x_0,\ x_0\in\mathbb{R}$

(3) $\lim_{x\to x_0} x^k = x_0^k$ jokaisella $k\in\mathbb{N}, k\geq 2, x_0\in\mathbb{R}$

sekä Lausetta 5.4.

Todistetaan kohta (3): Käytetään induktiota.
Alkuaskel: Kun $k=2$, on Lauseen 5.4(3) nojalla

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = \lim_{x\to x_0}(x\cdot x) = \lim_{x\to x_0} x \lim_{x\to x_0} x = x_0\cdot x_0 = x_0^2.$$

Induktioaskel: Oletetaan, että $\lim_{x\to x_0} x^k = x_0^k$ jollakin arvolla $k\geq 2$ (=*induktio-oletus*) ja osoitetaan, että $\lim_{x\to x_0} x^{k+1} = x_0^{k+1}$:
Lauseen 5.4(3), induktio-oletuksen ja tiedon (2) nojalla

$$\lim_{x\to x_0} x^{k+1} = \lim_{x\to x_0}(x^k\cdot x) = \lim_{x\to x_0} x^k \lim_{x\to x_0} x = x_0^k\cdot x_0 = x_0^{k+1}.$$

Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi kaikilla luvuilla $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$.

Lähdetään nyt selvittämään tehtävän raja-arvoa. Lauseen 5.4 kohtien (1) ja (2) sekä tietojen (1) – (3) nojalla

$$\lim_{x\to 1}(x^3+3x^2+5x) = \lim_{x\to 1} x^3 + 3\lim_{x\to 1} x^2 + 5\lim_{x\to 1} x = 1^3+3\cdot 1^2+5\cdot 1 = 9.$$

Samoin

$$\lim_{x\to 1}(7x^2+9) = 7\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 9 = 7\cdot 1^2+9 = 16\neq 0.$$

Silloin Lauseen 5.4 viimeisen kohdan nojalla

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2+5x}{7x^2+9} = \frac{9}{16}.$$

2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} = 2.$$

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. On osoitettava, että on olemassa luku M_ε siten, että

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2+1} - 2\right| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x > M_\varepsilon.$$

Lähdetään tarkastelemaan etäisyyttä. Oletetaan, että $x > 1$.

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2+1} - 2\right| = \left|\frac{2x^2-1-2(x^2+1)}{x^2+1}\right| = \left|\frac{-3}{x^2+1}\right| = \frac{|-3|}{|x^2+1|} \overset{(1)}{=} \frac{3}{x^2+1}$$
$$< \frac{3}{x^2} \overset{(2)}{<} \frac{3}{x}.$$

Perusteluja:
(1) Itseisarvon määritelmä.
(2) Kaikilla $x > 1$ pätee $x^2 > x$, joten $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$.

Tässä

$$\frac{3}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{3}{\varepsilon}.$$

Valitaan siis $M_\varepsilon = \max\{1, \frac{3}{\varepsilon}\}$. Oletetaan, että $x > M_\varepsilon$. Tällöin $x > 1$ ja $x > 3/\varepsilon$, joten

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2+1} - 2\right| = \frac{3}{x^2+1} < \frac{3}{x} < \frac{3}{3/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Määritelmän nojalla on siis osoitettu, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} = 2.$$

3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 7+} \frac{x+7}{x-7} = \infty.$$

Ratkaisu: Olkoon $M \in \mathbb{R}$. On osoitettava, että on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että

$$\frac{x+7}{x-7} > M \quad \text{aina, kun } x \in (7, 7+\delta).$$

Lähdetään arvioimaan lausekkeen arvoa, kun $x > 7$. Huomaa, että $x > 7$, sillä kyseessä on oikeanpuoleinen raja-arvo. Siis

$$\frac{x+7}{x-7} > \frac{7+7}{x-7} = \frac{14}{x-7}.$$

Jos $M \leq 0$, niin

$$\frac{x+7}{x-7} > \frac{14}{x-7} > 0 \geq M \quad \text{kaikilla } x > 7,$$

joten voimme valita esimerkiksi $\delta = 1$. Oletetaan siis, että $M > 0$. Tällöin

$$\frac{14}{x-7} > M \Longleftrightarrow x - 7 < \frac{14}{M}.$$

Valitaan siis $\delta = \frac{14}{M} > 0$. Oletetaan, että $x \in (7, 7+\delta)$. Siis $7 < x < 7 + \frac{14}{M}$, joten $0 < x - 7 < \frac{14}{M}$. Tästä seuraa, että

$$\frac{x+7}{x-7} > \frac{14}{x-7} > \frac{14}{14/M} = M.$$

Määritelmän nojalla on siis osoitettu, että

$$\lim_{x \to 7+} \frac{x+7}{x-7} = \infty.$$

4. Onko olemassa $\lim_{x\to\infty} \sin x$? Koulusta tuttuja sinifunktion ominaisuuksia saa tietysti käyttää.

Ratkaisu: Osoitetaan, ettei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{x\to\infty} \sin x$.

Tehdään **vastaoletus eli antiteesi**: On olemassa $\lim_{x\to\infty} \sin x = a \in \mathbb{R}$. Tällöin raja-arvon määritelmän nojalla jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ siten, että

$$|\sin x - a| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x > M_\varepsilon.$$

Valitaan (esimerkiksi) $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Tällöin on siis olemassa sellainen luku $M_{1/3}$, että jokaisella $x > M_{1/3}$ pätee, että

$$|\sin x - a| < \frac{1}{3}.$$

Valitaan sellainen kokonaisluku $n \in \mathbb{Z}$, että

$$x_1 = 2n\pi > M_{1/3}$$

(siis, $n > M_{1/3}/(2\pi)$). Tällöin myös

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi > M_{1/3}.$$

Vastaoletuksen nojalla on siis voimassa, että

$$|\sin x_1 - a| < \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad |\sin x_2 - a| < \frac{1}{3}.$$

Koulussa opittiin, että

$$\sin x_1 = \sin(2n\pi) = 0 \quad \text{ja} \quad \sin x_2 = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1.$$

Silloin pätee kolmioepäyhtälön ja vastaoletuksen nojalla, että

$$\begin{aligned} 1 = |\sin x_1 - \sin x_2| &= |(\sin x_1 - a) + (a - \sin x_2)| \\ &\overset{\Delta-ey}{\leq} |\sin x_1 - a| + |a - \sin x_2| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Tämä on ristiriita. Vastaoletuksemme on siis väärä ja alkuperäinen väite oikea.

5. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Määritellään jokaisella $\alpha > 0$ funktio $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $g_\alpha(x) = f(x) + \alpha x$. Oletetaan, että jokainen funktioista g_α on aidosti kasvava. Osoita, että f on kasvava.

Ratkaisu: Olkoot $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ja $x_1 < x_2$. Funktio $g_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, on aidosti kasvava, joten määritelmän mukaan pätee

$$g_\alpha(x_1) < g_\alpha(x_2).$$

Siis

$$f(x_1) + \alpha\, x_1 < f(x_2) + \alpha\, x_2$$

eli

$$f(x_1) - f(x_2) < \alpha(x_2 - x_1). \tag{1}$$

Jokainen funktioista $g_\alpha, \alpha > 0$, on aidosti kasvava, joten epäyhtälö (1) on voimassa kaikilla luvuilla $\alpha > 0$ ja kaikilla pisteillä $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$.

Väitteemme on siis, että funktio f on kasvava.
Tehdään **vastaoletus eli antiteesi**: funktio f ei ole kasvava. On siis olemassa pisteet $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, joille pätee $x_1 < x_2$ mutta $f(x_1) > f(x_2)$. Merkitään erotusta $f(x_1) - f(x_2) = r > 0$. Epäyhtälöstä (1) seuraa nyt, että

$$0 < r < \alpha(x_2 - x_1).$$

Jakamalla tämän epäyhtälön luvulla $x_2 - x_1 > 0$, saamme epäyhtälön

$$\alpha > \frac{r}{x_2 - x_1} > 0.$$

Tämän epäyhtälön tulisi olla voimassa kaikilla luvuilla $\alpha > 0$. Toisaalta, esimerkiksi luku $\alpha = \frac{1}{2}\frac{r}{x_2 - x_1} > 0$ se ei selvästikään toteuta tätä epäyhtälöä. Saimme ristiriidan. Vastaoletus on siis väärä: ei voi olla olemassa pisteitä $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, joille $x_1 < x_2$ mutta $f(x_1) > f(x_2)$.

Kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, on siis oltava $f(x_1) \leq f(x_2)$ eli funktio f on kasvava.

6. Oletetan, että $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että kaikilla x pätee: jos $0 < x < h$, niin $(1 - \frac{1}{7})x < f(x) < (1 + \frac{1}{7})x$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään $E(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Kun $|x|$ kyllin pieni (ja $x \neq 0$), niin $|E(x) - 1| < \frac{1}{7} \dots$) Kannattaa piirtää kuva!

Ratkaisu: Funktio $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ on oletuksen mukaan derivoituva pisteessä $x = 0$ ja $f'(0) = 1$. Derivaatan määritelmän nojalla pätee siis, että

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Funktion raja-arvon määritelmän nojalla kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että aina, kun $0 < |x - 0| < \delta$, niin

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Oletuksen mukaan $f(0) = 0$. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{7}$. Tällöin on siis olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että aina, kun $-\delta < x < \delta$, $x \neq 0$, niin

$$\left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| < \frac{1}{7}.$$

Erityisesti positiivisilla arvoilla $0 < x < \delta$ on voimassa

$$\left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| < \frac{1}{7}.$$

Itseisarvolemman nojalla tästä seuraa, että

$$-\frac{1}{7} < \frac{f(x)}{x} - 1 < \frac{1}{7} \quad \text{aina, kun } 0 < x < \delta.$$

Siis

$$1 - \frac{1}{7} < \frac{f(x)}{x} < 1 + \frac{1}{7} \quad \text{aina, kun } 0 < x < \delta.$$

Kerromme epäyhtälöt puolittain luvulla $x > 0$ ja saamme

$$(1 - \frac{1}{7})x < f(x) < (1 + \frac{1}{7})x \quad \text{aina, kun } 0 < x < \delta.$$

Väite on siis osoitettu oikeaksi, kun valitaan $h = \delta$.