MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 8, RATKAISUT Vadim Kulikov
10. 11. 2008 alkavalle viikolle

1. Osoita funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla, että

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$$

on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ratkaisu: Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että f on jatkuva pisteessä a. Funktio on jatkuva pisteessä a jos ja vain jos raja-arvo

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

on olemassa ja sen arvo on $f(a)$. Käyttämällä lausetta 5.4 voimme laskea raja-arvon. Nimittäjälle pätee $x^2 + 1 > 0$, sen raja-arvo on olemasa ja se on

$$\lim_{x \to a}(x^2 + 1) = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} 1 = a^2 + 1 \geq 1.$$

Näin päästään soveltamaan lisää lausetta 5.4:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{2x^3 + x^3 + x + 1}{x^2 + 1} &= \frac{\lim_{x \to a}(2x^3 + x^3 + x + 1)}{\lim_{x \to a}(x^2 + 1)} \\
&\overset{5.4}{=} \frac{\lim_{x \to a} 2x^3 + \lim_{x \to a} x^3 + \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} 1}{a^2 + 1} \\
&= \frac{2a^3 + a^3 + a + 1}{a^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Toisaalta funktion arvo pisteessä a on

$$f(a) = \frac{2a^3 + a^3 + a + 1}{a^2 + 1},$$

eli sama kuin laskettu raja-arvo. Funktion jatkuvuus onnistuttiin siis todistamaan mielivaltaisessa pisteessä a.

Huomautus. Luultavasti funktion määrittelyssä oli alun perin painovirhe, eli sen pitäisi olla

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

Yllä oleva ei siitä kuitenkaan muutu muuta kuin tämän yhden potenssin kohdalla.

2. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^{2001} + x^{2009}$. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $x \in]0, 1[$, jolle pätee $f(x) = 1$. Huolellinen perustelu!

Ratkaisu: Funktio f on jatkuva (sama päättely kuin edellisessä tehtävässä mutta sovelletaan 4009 kertaa lausetta 5.4) välillä $[0, 1]$ sekä $f(0) = 0$ ja $f(1) = 2$. Bolzanon lauseen nojalla jatkuva funktio, saa suljetulla välillä kaikki arvot välin päätepisteissä olevien arvojensa väliltä. Arvot päätepisteissä ovat 0 ja 2, joten funktio saa näiden väliltä kaikki arvot. Luku 1 kuuluu tälle välille ($0 < 1 < 2$). Siis funktio saa arvon 1.

3. Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Osoita, että $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$ ja $f(x) \to \infty$ kun $x \to \infty$. Osoita näiden havaintojen avulla, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 7777$.

Ratkaisu: Funktio kasvaa rajatta, jos kaikilla rajoilla se saadaan pysymään niiden rajojen ulkopuolella.

Olkoon $M > 0$. Valitaan $x_0 = \max\{1, M\}$. Tällöin jos $x > x_0$, niin $x^{2001} + x^{2009} > x + x = 2x > x_0 \geq M$. Eli kaikilla $M > 0$ löytyy x_0 s.e. $f(x) > M$, kun $x > x_0$. Tämä todistaa että $f(x) \to \infty$ kun $x \to \infty$.

Sen todistaminen, että $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$ menee samalla tavalla kuin yllä oleva, mutta peilikuvana:

Olkoon $M < 0$. Valitaan $x_0 = \min\{-1, M\}$. Tällöin jos $x < x_0$, niin $x^{2001} + x^{2009} = -|x|^{2001} - |x|^{2009} < -|x| - |x| = -2|x| < x_0 \leq M$. Eli kaikilla $M < 0$ löytyy x_0 s.e. $f(x) < M$, kun $x < x_0$. Tämä todistaa että $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$.

Olkoon nyt $M = 7777$. Edellisestä tiedämme, että on olemassa x_0, jolla $f(x_0) > M$ (funktiohan kasvaa rajatta). Toisaalta $f(0) = 0$ ja funktio on jatkuva välillä $[0, x_0]$. Nyt Bolzanon lauseesta seuraa, että jossakin pisteessä funktio saa arvon M, koska $f(0) < M < f(x_0)$.

4. Olkoon f tehtävän 2 funktio. Määritellään

$$g(x) = \frac{1}{f(x)^2 + 1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita funktio g saa on suurin.

Ratkaisu: **Tapa 1:** Koska $f(x)^2 \geq 0$, saamme että

$$g(x) = \frac{1}{f(x)^2 + 1} \leq \frac{1}{0^2 + 1} = 1.$$

Eli $g(x) \leq 1$. Siis jos funktio saa jossakin arvon 1, niin se on suurin. Se saa sen pisteessä nolla: $g(0) = 1$, koska tiedämme, että $f(0) = 0$.

Tapa 2: Tämä tapa saattaa näyttää pidemmältä ja työläämmältä, mutta siinä on se hyvä puoli, että tämä tapa soveltuu myös tapauksiin, milloin funktion lauseketta ei tunneta, vaan tiedetään ainoastaan että $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$ ja että funktio saa jossakin positiivisen arvon (osaatko yleistää seuraavan tähän tarkoitukseen?).

Weierstrassin lauseen nojalla tiedämme, että jatkuva funktio saa suljetulla välillä suurimman arvon. Yritetään soveltaa tätä. Nyt kuitenkin funktio on määritelty enemmän kuin suljetulla välillä.

Havaitsemme, että g:n lausekkeen nimittäjä on aina positiivinen, joten funktio on määritelty ja positiivinen. Lisäksi koska $f(0) = 0$, saamme, että $g(0) = 1$. Valitsemalla edellisessä tehtävässä $M = 2$, löydetään sellainen $x_0 > 0$, että jos $|x| > x_0$, niin $|f(x)| > 2$, jolloin

$$g(x) < \frac{1}{5}.$$

Siis välin $[-x_0, x_0]$ ulkopuolella funktion arvot ovat pienempiä kuin $\frac{1}{5}$.

Weierstrassin lauseen nojalla funktiolla on suurin arvo välillä $[-x_0, x_0]$. Merkitään tätä arvoa y_0. Koska $0 \in [-x_0, x_0]$ ja $g(0) = 1$ täytyy olla $y_0 \geq 1$. Mutta tästä seuraa, että y_0 ei ole pelkästään suurin arvo välillä $[-x_0, x_0]$, vaan myös koko reaaliakselilla: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Jos sattuu olemaan $x \in [-x_0, x_0]$, niin $y_0 \geq f(x)$ määritelmän nojalla. Toisaalta jos sattuu olemaan $x \notin [-x_0, x_0]$, niin tiedämme että $f(x) < 1/5 < 1 \leq y_0$.

5. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja aidosti kasvava välillä $]0, 1[$. Onko f välttämättä aidosti kasvava koko välillä $[0, 1]$?

Ratkaisu: On. Tämän ratkaisun seuraamista voi helpoittaa jos lukijalla on samalla piirrustusmahdollisuus.

Oletetaan vastoin, että jollakin luvulla $x < 1$, joka on positiivinen, pätee $f(x) \geq f(1)$. Valitaan y näiden lukujen välistä: $x < y < 1$. Koska $x, y \in]0,1[$ ja funktio on tuolla aidosti kasvava, saadaan $f(x) < f(y)$. Siis $f(y) > f(1)$. Koska funktio on jatkuva välillä $[y, 1]$, se saa siinä kaikki arvot väliltä $[f(1), f(y)]$. Tämä tarkoittaa, että on olemassa z siten että $y < z < 1$ ja $f(z) < f(y)$. Tämä on ristiriita, koska funktion piti olla aidosti kasvava välillä $]0,1[$. Vastaavalla päättelyllä todistetaan toiselle välin päätepisteelle:

Oletetaan nyt, että jollakin luvulla $x > 0$ pätee $f(x) \leq f(0)$. Valitaan y näiden lukujen välistä: $0 < y < x$. Koska $x, y \in]0,1[$ ja funktio on tuolla aidosti kasvava, saadaan $f(y) < f(x)$. Siis $f(y) < f(0)$. Koska funktio on jatkuva välillä $[0, y]$, se saa siinä kaikki arvot väliltä $[f(y), f(0)]$. Tämä tarkoittaa, että on olemassa z siten että $0 < z < y$ ja $f(z) > f(y)$. Tämä on ristiriita, koska funktion piti olla aidosti kasvava välillä $]0,1[$.

Vielä yksi tapaus on käsittelemättä: $f(1) \leq f(0)$. Oletetaan että näin on. Olkoon $x \in]0,1[$. Nyt jompi kumpi (tai molemmat) seuraavasta pätee:

- $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) \leq f(0)$.

Mutta nämä ovat ristiriidassa sen kanssa mitä ylempänä todistettiin.

6. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Oletetaan, että $f(1) < f(2)$ ja $f(4) < f(3)$. Osoita, että on olemassa kaksi eri reaalilukua x ja y, joilla $f(x) = f(y)$.

Ratkaisu:

Tapa 1: Määritellään uusi funktio $g(x) = f(x) - f(x+1)$. Funktio g on jatkuva koska f on jatkuva (sovelletaan kerran lausetta 5.4). Lisäksi tiedämme, että $g(1) = f(1) - f(2) < 0$ ja $g(3) = f(3) - f(4) > 0$. Tästä seuraa Bolzanon lauseen nojalla, että on olemassa x jolla $g(x) = 0$. Tämä tarkoittaa, että $f(x) - f(x+1) = 0$, eli $f(x) = f(x+1)$, mutta tietenkin $x \neq x+1$, eli g ei ole injektio.

Tapa 2: Tässä päättely muistuttaa edellistä tehtävää. Tässäkin piirtäminen helpottaa.

Tapaus 1: $f(2) = f(3)$. Ei todistettavaa: $x = 2$, $y = 3$, $f(x) = f(y)$.

Tapaus 2: $f(2) < f(3)$. Nyt Bolzanon lauseen nojalla funktio saa välillä $]2,3[$ kaikki arvot väliltä $[f(2), f(3)]$ ja välillä $]3,4[$ kaikki arvot välillä

$[f(4), f(3)]$. Valitaan piste

$$t \in \, \big] \max\{f(2), f(4)\}, f(3) \big[$$

(huomaa että $\max\{f(2), f(4)\} < f(3)$). Nyt Bolzanon lauseen nojalla saadaan, että välillä $]2, 3[$ on piste x s.e. $f(x) = t$ ja toisaalta välillä $]3, 4[$ on piste y, jolla $f(y) = t$. Toisaalta $]2, 3[\, \cap \,]3, 4[\, = \varnothing$, joten $x \neq y$.

Tapaus 3: $f(2) > f(3)$. Valitaan piste

$$t \in \, \big] \max\{f(3), f(1)\}, f(2) \big[$$

(huomaa että $\max\{f(3), f(1)\} < f(2)$). Nyt Bolzanon lauseen nojalla saadaan, että välillä $]1, 2[$ on piste x s.e. $f(x) = t$ ja toisaalta välillä $]2, 3[$ on piste y, jolla $f(y) = t$. Toisaalta $]1, 2[\, \cap \,]2, 3[\, = \varnothing$, joten $x \neq y$.