MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 1, Ratkaisut (Vadim)
8 . 9. 2008 alkavalle viikolle

1. Luvun x käänteisluku on sellainen yksikäsitteinen luku y, että $xy = 1$. Miksi luvulla 0 ei ole käänteislukua; ts. miksi nollalla ei saa jakaa?

   Ratkaisu: Jos saamme käyttää tietoa, että kaikille reaaliluvuille a pätee $0 \cdot a = 0$ ja $0 \neq 1$, niin väite voidaan todistaa esimerkiksi näin: Nollalla ei ole käänteislukua y, koska mille tahansa y pätee $0 \cdot y = 0$, mutta $0 \neq 1$, joten mikään y ei kelpaa käänteisalkioksi.

   Voimme myös aksioomien valossa perustella väite $0 \cdot x = 0$ kaikilla x. Nollan ominaisuuksiin kuuluu $a + 0 = a$ kaikilla a (tämä on aksiooma), joten $0+0 = 0$. Tästä seuraa $0 \cdot x = (0+0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Koska jokaisella luvulla on käänteisalkio (aksiooma), niin tästä yhtälöstä voidaan vähentää puolittain $0 \cdot x$ ja saadaan $0 = 0 \cdot x$.

2. Oletetaan, että $x < 4$ ja $y \leq 2$. Pitääkö tällöin välttämättä paikkansa, että $xy \leq 10$?

   Ratkaisu: Väite ei pidä paikkaansa. Valitaan esimerkiksi $x = -10$ ja $y = -3$. Tällöin sekä $x < 4$ että $y \leq 2$, mutta $xy = 30 > 10$.

3. Ovatko seuraavat väitteet tosia

   (a) $x^2 < x$ aina kun $0 < x < 1$?

   (b) $x^3 < x^2$ aina kun $0 < x < 1$?

   (c) $x^2 < y^2$ aina kun $x < y$?

   (d) $x^2 < y^2$ aina kun $0 < x < y$?

   Yritä perustella tuloksesi monisteessa ja luennoilla käsiteltyjen suuruusjärjestyksen ominaisuuksien avulla?

   Ratkaisu:

   (a) Oletetaan $0 < x < 1$. Silloin x on positiivinen ja päätee $x < 1$. Kun kerrotaan epäyhtälön molemmat puolet positiivisella luvulla, järjestys säilyy. Kertomalla $x < 1$ puolittain positiivisella x, saadaan $x^2 < x$.

   (b) Jatketaan edellistä kertomalla $x^2 < x$ puolittain positiivisella x, saadaan $x^3 < x^2$.

   (c) Väite ei pidä paikkaansa, sillä jos luvut eivät ole positiivisia, toinen potenssi vaihtaa järjestyksen. Esimerkiksi jos $x = -2$ ja $y = -1$, niin $x < y$, mutta $x^2 = 4 > 1 = y^2$.

(d) Tämä väite puolestaan pätee, koska nyt x ja y ovat positiivisia. Voimme edetä seuraavasti. Tiedämme, että $x < y$ ja x on positiivinen, joten voimme kertoa sillä puolittain. Saadaan

$$x^2 < yx.$$

Toisaalta y on positiivinen, joten voimme kertoa silläkin puolittain (yhtälön $x < y$) saadaksemme

$$xy < y^2.$$

Yhdistämällä (ja käyttämällä $xy = yx$) saadaan $x^2 < xy < y^2$, eli $x^2 < y^2$.

4. Pitääkö epäyhtälö $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ paikkansa kun $0 \leq x < y$? Tässä saa suuruusjärjestustä koskevan tiedon lisäksi käyttää tietoa, että kun $0 \leq a$, niin $\sqrt{a}$ on sellainen yksikäsitteinen epänegatiivinen luku, jonka neliö on a.

Ratkaisu: Käytämme hyväksemme edellisen tehtävän d-kohtaa. Nimittäin tehdään vastaoletus: $0 \leq x < y$, mutta $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. Edellisen tehtävän nojalla jos $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ (aito epäyhtälö), niin $x > y$, joten ainoa keino, jolla $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ voi olla totta on se, että molemmat puolet olisivat yhtä suuret, mutta tämäkään ei voi pitää paikkansa, sillä neliöjuuri on yksikäsitteinen, eli jos $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, niin $x = y$, mikä on myös ristiriidassa oletuksen kanssa.

5. Päteekö seuraava väite: Jos $0 < x < 1$, niin

$$x^{13} + 3x^7 + x < 4x^5 + 1?$$

Vihje: Tehtävän 3 (b) kohta liittyy tietoon $x^n < x^m$ kun $n > m$ ja $0 < x < 1$.

Ratkaisu: Oletetaan $0 < x < 1$. Yhdistämällä tehtävän 3 kohdat (a) ja (b) saadaan $x^3 < x^2 < x < 1$. Jatkamalla induktiolla saadaan $x^m < x^{m-1} < x^{m-2} < \cdots < x^2 < x < 1$ kaikille m, eli jos $m < n$, niin tästä seuraa myös $x^m < x^n$. Tällöin muun muassa

$$x^{13} < x^7 < x < 1.$$

Käyttämällä tätä vaiheittain saadaan:

$$\begin{aligned} & x^{13} + 3x^7 + x \\ & < x^7 + 3x^7 + x \\ & < 4x^7 + 1 \\ & < 4x^5 + 1. \end{aligned}$$

6. Oletetaan, että $4 - 3^{-999} < x < 4$. Osoita, että $2 - \sqrt{x} < 3^{-1000}$.

Ratkaisu: Idea on tietenkin se, että tietyssä mittakaavassa x on hyvin lähellä lukua 4 ja tästä halutaan päätellä, että luku $\sqrt{x}$ on (samassa mittakaavassa) hyvin lähellä lukua $\sqrt{4} = 2$. Seurataan annettua vihjettä. Päätellään ensin, että $4 - x < 3^{-999}$:

$$4 - 3^{-999} < x \iff -3^{-999} < x - 4 \iff 4 - x < 3^{-999}.$$

Sitten lavennetaan:

$$2 - \sqrt{x} = \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} = \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}.$$

Nyt meillä on sopivasti $4 - x$ osoittajassa, josta me tiedämmekin jotain. Voimme siis arvioida

$$2 - \sqrt{x} = \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} < \frac{3^{-999}}{2+\sqrt{x}}.$$

Nyt meidän on jotenkin hankkiuduttava eroon nimittäjästä. Koska $1/3 < 1$, tiedämme tehtävän 5 päättelystä, että $1/3^{999} < 1$, mistä seuraa, että $4 - 3^{-999} > 3$, ja koska oletus oli, että $x > 4 - 3^{-999}$, saadaan $x > 3$. Itse asiassa tärkeätä on, että $x > 1$, nimittäin nyt voimme tehtävän 4 avulla päätellä, että $\sqrt{x} > \sqrt{1} = 1$, eli nimittäjä $2 + \sqrt{x}$ on suurempi kuin 3. Kun luvun nimittäjää pienennetään, luku itse suurenee, joten:

$$2 - \sqrt{x} < \frac{3^{-999}}{2+\sqrt{x}} < \frac{3^{-999}}{3} = 3^{-1000}.$$