

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

Övning 9

För veckan som börjar den 17. 11. 2008

I dessa övningar får man använda alla från skolan bekanta egenskaper hos från skolan bekanta funktioner som till exempel sinusfunktionens kontinuitet och deriveringsregler.

1. Vi definerar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med ekvationen $f(x) = x|x|$. För vilka x existerar derivatan $f'(x)$? För vilka x existerar den andra derivatan $f''(x)$? För vilka x existerar den tredje derivatan $f'''(x)$?

2. Derivera

(a) $\sin^3 x^4$;

(b) $\sin^2(\sin^3 x^4)$;

(c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1}$.

3. Vi betraktar funktionen $f :]0, 2[\rightarrow]1, 37[$, för vilken det gäller att $f(x) = x^5 + x^2 + 1$ för varje $x \in]0, 2[$. Varför har den en strängt växande (kontinuerlig) och deriverbar inversfunktion $g :]1, 37[\rightarrow]0, 2[$. Bestäm $g'(3)$. Tips: beräkna först $f(1)$.

4. Vi antar att $f'(1) = 2$. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}.$$

Tips: expandera det undersökta uttrycket till en form där differenskvotsformerna

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{och} \quad \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}.$$

uppträder.

5. Hur kan man från ekvationen $(7+h)^4 = 7^4 + 4 \times 7^3 \times h + 6 \times 7^2 \times h^2 + 4 \times 7 \times h^3 + h^4$ med hjälp av karakteriseringssatsen läsa ut derivatan av funktionen $f(x) = x^4$ i punkten $x = 7$?

6. Vi antar att $p > 0$. Visa att ekvationen $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ har högst två olika stora reella rötter. Tips: Beteckna ekvationens vänstra sida = $f(x)$. Visa först med hjälp av den andra derivatan att f' är strängt växande. Tillämpa sedan Rolles sats i mellanrummet mellan två på varandra följande rötter till ekvationen.