INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 8
För veckan som börjar 10. 11. 2008.

1. Visa med hjälp av satserna som behandlar funktioners gränsvärden att

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$$

är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$.

2. Vi definerar en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med villkoret $f(x) = x^{2001} + x^{2009}$. Visa med hjälp av Bolzanos sats att det existerar ett $x \in]0, 1[$, för vilket $f(x) = 1$. Noggrann motivering!

3. Vi betraktar funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i föregående uppgift. Visa att $f(x) \to -\infty$ när $x \to -\infty$ och $f(x) \to \infty$ när $x \to \infty$. Visa med hjälp av dessa observationer att det existerar ett $x \in \mathbb{R}$, för vilket $f(x) = 7777$.

4. Låt f vara funktionen i uppgift 2. Vi definierar

$$g(x) = \frac{1}{f(x)^2 + 1}.$$

Visa att mängden av funktionsvärden för g har ett högsta tal.

5. Vi antar att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[0, 1]$ och strängt växande i intervallet $]0, 1[$. Är f nödvändigtvis strängt växande i hela intervallet $[0, 1]$?

6. Vi antar att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Vi antar att $f(1) < f(2)$ och $f(4) < f(3)$. Visa att det existerar två reella tal x och y, för vilka $f(x) = f(y)$.