

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

Övning 7

För veckan som börjar 3. 11. 2008.

UTDELNING AV EXTRAPOÄNG

För räkneövningarna: 4 poäng, om man räknat minst 50 uppgifter; 3 poäng om man räknat färre än 50 men minst 40; 2 poäng om man räknat färre än 40 men minst 30; och 1 poäng om man räknat färre än 30 men minst 20 av höstens uppgifter.

För handledningarna: 2 poäng, om man från och med 3. 11. deltagit i 5 - 6 handledningar och 1 poäng, om man deltagit i 3 - 4 handledningar.

1. Utred med hjälp av sats 5.4

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x}{7x^2 + 9}.$$

2. Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = 2.$$

3. Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x + 7}{x - 7} = \infty.$$

4. Existerar gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ ? Man får naturligtvis använda sig av egenskaper hos sinusfunktionen som är bekanta från skolan.

5. Vi antar att  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Vi definierar för varje  $\alpha > 0$  funktionen  $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  med villkoret  $g_\alpha(x) = f(x) + \alpha x$ . Vi antar att varenda en av dessa funktioner  $g_\alpha$  är strängt växande. Visa att  $f$  är växande.

6. Vi antar att  $f : ] - 1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  uppfyller villkoren  $f(0) = 0$  och  $f'(0) = 1$ . Visa att det existerar ett sådant  $h > 0$ , att det för varje  $x$  gäller: om  $0 < x < h$ , så  $(1 - \frac{1}{7})x < f(x) < (1 + \frac{1}{7})x$ . (Det lönar sig att tillämpa definitionen av en funktions gränsvärde på differenskvoten  $E(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ . När  $|x|$  är tillräckligt litet (och  $x \neq 0$ ), så  $|E(x) - 1| < \frac{1}{7} \dots$ ) Det lönar sig att rita en bild!