INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 6
För veckan som börjar 27. 10. 2008.

I dessa övningar fortsätter vi arbeta med funktioners gränsvärden. Funktioners kontinuitet och deriverbarhet är med från början som exempel på gränsvärden.

1. Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde att påståendet

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

stämmer.

2. Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde att påståendet

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{5}{7}$$

är falskt.

3. Vi definerar funktionen $f :]0,3[\to \mathbb{R}$ med villkoret

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Visa med hjälp av definitionerna av en funktions gränsvärde och derivata att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 2$ och att $f'(2) = \frac{2}{9}$.

4. Visa med hjälp av definitionerna av en funktions gränsvärde och derivata att funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är deriverbar i punkten $x = 4$ och att $f'(4) = 1/4$.

5. Vi antar att $h > 0$ och att funktionen f är definerad för alla $x \in]x_0 - h, x_0 + h[$ och att $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, där $b \neq 0$. Visa att det existerar ett sådant $\delta > 0$, att det för alla $x \neq x_0$ gäller: om $|x - x_0| < \delta$, så $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$. Tips: det kan vara till hjälp att betrakta fallen $b < 0$ och $b > 0$ separat.

6. Vi antar att funktionen g uppfyller $x \in]-1,1[$ olikheten $|g(x)| < 7$. Visa att funktionen $f(x) = x^2 g(x)$ är deriverbar i punkten $x = 0$ och att $f'(0) = 0$. Undersök modigt differenskvotens avstånd till talet 0.

(Notera att vi t.ex. kan ha $g(x) = 0$ när x är rationellt och $g(x) = 1$ när x är irrationellt. Funktionen kan alltså vara deriverbar i en punkt och diskontinuerlig i alla andra punkter.)