INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 10
För veckan som börjar 24. 11. 2008

I dessa övningar får man använda alla bekanta egenskaper hos alla från skolan bekanta funktioner, som till exempel kosinusfunktionens kontinuitet och deriveringsregler. Medelvärdessatsen kan vara till nytta i flera uppgifter.

Vissa av uppgifterna påminner om skoluppgifter: motivera dina svar med hjälp av satserna i kursen.

1. Vi antar att funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $[0, 1]$ och deriverbar i intervallet $]0, 1[$. Vi antar att $f(0) = 7$ och att det för varje $x \in]0, 1[$ gäller att $x < f'(x) < 1$. Vad kan vi utgående ifrån detta säga om värdet $f(1)$? Tips: hjälpfunktionen $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ kan vara till nytta: det lönar sig att visa att det för alla $x \in]0, 1[$ gäller $g'(x) > 0$.

2. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att det för varje x gäller att

$$|\cos x - 1| \leq |x|.$$

(Det lönar sig att komma ihåg att $\cos 0 = 1$.)

3. Vi antar att $a_1, \ldots, a_n$ är reella tal. För vilka x får den så kallade kvadratsumman $(x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$ sitt minsta möjliga värde?

4. Vi antar att $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0, 1]$ och deriverbar i intervallet $]0, 1[$. Anta att $\lim_{x \to 0+} f'(x) = \infty$. Visa att funktionen f inte är deriverbar i punkten $x = 0$. Visa med hjälp av detta resultat att funktionen i nästa uppgift inte är deriverbar i punkten $x = 0$.

5. Undersök möjliga största och minsta värden för funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ då

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4 + 1}}$$

när $x \in \mathbb{R}$.

6. Anta att $h > 0$ och att funktionen $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $]x_0 - h, x_0 + h[$ och deriverbar i intervallen $]x_0 - h, x_0[$ och $]x_0, x_0 + h[$. Vi antar dessutom att $\lim_{x \to x_0 -} f'(x) = \lim_{x \to x_0 +} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Visa att f är deriverbar i x_0 och att $f'(x_0) = A$. Tips: tillämpa medelvärdessatsen på differenskvoten.