

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

Övning 4

29.9–3.10.2008

I den här övningen jobbar vi med talföljder. Nu har vi satser rörande gränsvärden att använda. Du kan använda allt som behandlats på föreläsningarna eller finns i kompendiet, om inte annat skilt nämns. Men berätta vad du använder dig av.

Repetera vid behov sådant som gäller induktion och rekursion.

1. Bestäm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 2)(2n^2 - 1)}{(n + 1)(n^3 + 3)}$$

2. Vi definierar $x_n = \frac{1}{n} \cos n$. Visa att $x_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$

(a) utgående direkt från definitionen;

(b) Med hjälp av sats 4.11.

Du kan använda allt du lärt dig om cosinusfunktionen i skolan.

3. Har följderna (x_k) ett gränsvärde om det för alla k gäller att $x_k = \sqrt{k^2 + k} - \sqrt{k^2}$?

4. Antag att följderna (x_n) avtagande, följderna (y_n) växande och att det för alla n gäller att $y_n \leq x_n$. Visa att båda följderna konvergerar. (Tips: Du kan visa att följderna (x_n) är nedifrån begränsad och att följderna (y_n) är uppifrån begränsad.)

5. Visa att ett reellt tal $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 7\}$ existerar och att $a^2 = 7$.

6. Bearbeta exemplet från föreläsningarna och visa att (x_n) har gränsvärdet $\sqrt{7}$, om $x_1 = 2$ och det för alla n gäller att

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{7}{x_n} \right).$$

Tilläggsfrågor (krävs inte för att få krusa i): (a) Kan du förklara varför följderna verkar konvergera snabbt? (b) Kan du ge ett exempel på ett index n för vilket $|x_n - \sqrt{7}| < 10^{-100}$?