ÖVNING INFÖR ANDRA KURSPROVET

Här har vi övningsmaterial för andra kursprovet. Provområdet är grovt taget kursens andra hälft, dvs från och med definitionen av en funktions gränsvärde till de hyperboliska och trigonometriska funktionerna. Den här uppgiftsserien är avsedd att ge en klarare bild av de viktigaste sakerna i kursen.

(1) Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde att
$$\lim_{x\to 3} x^3 = 27.$$
(2) Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde att
$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}.$$
(3) Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde att påståendet
$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{5}{6}$$
är falskt.

(4) Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde att
$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}.$$
Tolka resultatet som en derivata.

(5) Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde och kontinuitet att funktionen f som för alla x har värdet $f(x) = x^2 - 3x$ är kontinuerlig i unkten$x = 2$.

(6) 3. Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde och derivata att funktionen f som för alla x har värdet $f(x) = x^2 - 3x$ är deriverbar i punkten $x = 2$.

(7) Vi antar att $|f(x)| \leq 2$ för varje $x \in]-1, 1[$. Vi definierar funktionen $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ med vilkoret $g(x) = xf(x)$. Visa att g är kontinuerlig i punkten $x = 0$.

(8) Vi antar att $|f(x)| \leq 2$ för varje $x \in]-1, 1[$. Vi definierar funktionen $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ med vilkoret $g(x) = x^2 f(x)$. Visa att g är deriverbar i punkten $x = 0$.

(9) Utred med hjälp av satserna i kursen
$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^3 + x^2 + 3x}{3x^2 + 2x + 1}.$$
(10) Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde och derivata att funktionen $f :]0, 3[\to \mathbb{R}$, som för alla $x \in]0, 3[$, har värdet
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$
är deriverbar i punkten $x = 2$ och att $f'(2) = -2$.

(11) Vi antar att $\lim_{x\to 4} f(x) = 7$. Visa med hjälp av definitionen av en funktions gränsvärde att $\lim_{x\to 2} f(x^2) = 7$.

(12) Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x^2+1} = 1.$$

(13) Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x\to 7-} \frac{x+7}{x-7} = -\infty.$$

(14) Vi antar att $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uppfyller villkoren $f(0) = 0$ och $f'(0) = 2$. Visa att det existerar ett $h > 0$, så att det för alla x gäller: om $0 < x < h$,så $(2 - \frac{1}{10^{100}})x < f(x) < (2 + \frac{1}{10^{100}})x$. det lönar sig att rita en bild!

(15) Visa med hjälp av Bolzanoa sats att ekvationen $e^x = \sin x$ har åtminstone en lösning. Noggrann motivering!

(16) Vi betraktar funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(x^7)}{x^2+1}.$$

Visa att f har ett största värde. Tips: sök först en punkt där f har ett positivt värde.

(17) Vi betraktar funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(x^7)}{x^2+1}.$$

Visa att har ett minsta värde f.

(18) Vi definierar$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen $f(x) = x^2|x|$. För vilka x existerar derivatan $f'(x)$? Den andra derivatan $f''(x)$? Den tredje $f'''(x)$?

(19) Derivera $\sqrt{\ln(x^2+3)}$.

(20) Vi betraktar funktionen $f : [0,2] \to [1,5]$, för vilken $f(x) = x^2 + 1$ för alla $x \in [0,2]$. Visa att den har en strängt växande (kontinuerlig) och deriverbar inversfunktion $g :]1,5[\to]0,2[$. Bestäm $g'(2)$.

(21) Vi betraktar funktionen $f :]0,7[\to \mathbb{R}$, för vilken $f'(1) = 2$ och $f'(3) = 5$. Visa att det i intervallet $]1,3[$ finns ett tal a, för vilket $f'(a) = 4$. Det lönar sig att undersöka funktionen $g(x) = f(x) - 4x$.

(22) Visa noggrant att funktionen f inte är deriverbar i punkten $x = 0$, om $f(0) = 0$ och $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ när $x \neq 0$.

(23) Vi antar att $f'(1) = 2$. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}.$$

(24) Hur kan man ur ekvationen $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$ och med hjälp av karakteriseringssatsen utläsa derivatan av funktionen$f(x) = x^4$?

(25) Vi antar att f är kontinuerlig i intervallet $[1,3]$ och deriverbar i intervallet $]1,3[$. Vi antar dessutam att det för varje $x\in]1,3[$ gäller att $0\le f'(x)\le 1$. Vad kan vi säga om $f(3)$, ifall $f(1)=5$?

(26) Vi antar att f är kontinuerlig i intervallet $[1,3]$ och deriverbar i intervallet $]1,3[$. Vi antar dessutam att det för varje $x\in]1,3[$ gäller att $0\le f'(x)\le 1$. Vad kan vi säga om $f(1)$, ifall $f(3)=5$?

(27) Vi antar att funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $]0,1[$. Vi antar att $f(0)=7$ och att det för varje $x\in]0,1[$ gäller att $x<f'(x)<1$. Vad kan vi utgående ifrån dett säga om $f(1)$? Tips: funktionen $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$ kan vara till hjälp.

(28) Visa med hjälp av medelvärdessatsen att det för varje x gäller att $|\cos x-1|\le|x|$. (Kom ihåg att $\cos 0=1$.)

(29) Vi antar att $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig och deriverbar. Vi antar dessutom att, det för varje x gäller att $|f'(x)|<7$. Ge ett exempel på ett sådant tal $\delta>0$, att för varje $x,y\in\mathbb{R}$ gäller: om $|x-y|<\delta$, så $|f(x)-f(y)|<7^{-100}$.

(30) Undersök möjliga största och minsta värden samt lokala extremvärden när

$$f(x)=\sqrt[7]{\frac{x^4}{x^8+1}}$$

för varje $x\in\mathbb{R}$. Tips: Det lönar sig att notera att du kan undersöka uttrycket under roten och beteckna $t=x^2$. Motivera din lösning!

(31) Vi antar att $h>0$ och att funktionen $f:]x_0-h,x_0+h[\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $]x_0-h,x_0+h[$ och deriverbar i intervallen $]x_0-h,x_0[$ och $]x_0,x_0+h[$. Vi antar dessutom att $\lim_{x\to x_0-}f'(x)=\lim_{x\to x_0+}f'(x)=A\in\mathbb{R}$. Visa att f är deriverbar i punkten x_0 och att $f'(x_0)=A$.Tips: tillämpa medelvärdessatsen.

(32) Vi antar att $h>0$ och att funktionen $f:]x_0-h,x_0+h[\to\mathbb{R}$ är deriverbar i intervallen $]x_0-h,x_0+h[$. Vi antar dessutom att $|f'(x)|\le 7$ när $x_0-h<x<x_0$ eller $x_0<x<x_0+h$. visa att $|f'(x_0)|\le 7$.

(33) Vi antar att $h>0$ och att funktionen $f:]x_0-h,x_0+h[\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig och deriverbar i intervallet
$]x_0-h,x_0+h[$ Vi antar dessutom att $\lim_{x\to x_0-}f'(x)=A$ och $\lim_{x\to x_0+}f'(x)=B$. Visa att $f'(x_0)=A=B$.

(34) Visa att det för alla $x\ge 0$ gäller $\ln(x+1)\le x$.

(35) Visa att det för alla $x\ge 0$ gäller $\ln(x+1)\ge x-\frac{x^2}{2}$.

(36) Visa att det för alla $x\ge 0$ gäller $\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. (Fjärde derivatan kan hjälpa.)

(37) Vi betraktar den med ekvationen $f(x)=x^x$ i $]0,2[$ definierade funktionen. Bestäm dess lokala extremvärden. Noggrann motivering!

(38) Vi betraktar funktionen $f:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ där $f(x)=e^{-2x}\sin(\sqrt{3}x)$. Bestäm dess lokala extremvärden. Vad händer med funktionen när $x\to\infty$?