Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Harjoitus 3
Mallit (HL)

Tehtävä 1. *Olkoon* $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *sekä* $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
w(x_1, x_2, x_3) &= (x_2, \frac{x_1}{1+x_2^2}, e^{x_1 x_3}) \\
h(x, y, z) &= x + 2y - z.
\end{aligned}
$$

Laskemme ensin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (h \circ w)(x_1, x_2, x_3) = x_2 + \frac{2x_1}{1+x_2^2} + e^{x_1 x_3},$$

josta saadaan

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_2} f(x_1, x_2, x_3) &= 1 - \frac{4x_1 x_2}{(1+x_2^2)^2} \\
\partial_{x_3} f(x_1, x_2, x_3) &= -x_1 e^{x_1 x_3}.
\end{aligned}
$$

Toisaalta ketjusäännöllä saadaan

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_2} f(x_1, x_2, x_3) &= \partial_x h \partial_{x_2} x + \partial_y h \partial_{x_2} y + \partial_z h \partial_{x_2} z \\
&= 1 \cdot 1 + 2 \cdot -\frac{2x_1 x_2}{(1+x_2^2)^2} - 1 \cdot 0 \\
&= 1 - \frac{4x_1 x_2}{(1+x_2^2)^2}
\end{aligned}
$$

sekä

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_3} f(x_1, x_2, x_3) &= \partial_x h \partial_{x_3} x + \partial_y h \partial_{x_3} y + \partial_z h \partial_{x_3} z \\
&= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot x_1 e^{x_1 x_3} \\
&= -x_1 e^{x_1 x_3}.
\end{aligned}
$$

Merkinnöistä: tässä $w_1 = x = x(x_1, x_2, x_3), w_2 = y = y(x_1, x_2, x_3)$,$w_3 = z = z(x_1, x_2, x_3)$*, esimerkiksi yllä* $x = x_2$*, joten* $\partial_{x_2} x = 1$ *ja* $\partial_{x_3} x = 0$.

Tehtävä 2. *Kuten edellä määrittelemme*

$$
\begin{aligned}
w(x_1, x_2, x_3) &= (x_3^2, x_1 + x_2, x_1^2 + x_3^2) \\
h(x, y, z) &= \frac{y - z}{1 + x^2}.
\end{aligned}
$$

Nyt saadaan

$$f(x_1, x_2, x_3) = (h \circ w)(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 - x_1^2 - x_3^2}{1 + x_3^4},$$

josta nähdään osittaisderivaatat

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1-2x_1}{1+x_3^4}$$
$$\partial_{x_2} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1+x_3^4}.$$

Toisaalta ketjusäännöllä saadaan

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} f(x_1, x_2, x_3) &= \partial_x h \partial_{x_1} x + \partial_y h \partial_{x_1} y + \partial_z h \partial_{x_1} z \\ &= 0 + \frac{1}{1+x_3^4} \cdot 1 - \frac{1}{1+x_3^4} \cdot 2x_1 = \frac{1-2x_1}{1+x_3^4},\end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned}\partial_{x_2} f(x_1, x_2, x_3) &= \partial_x h \partial_{x_2} x + \partial_y h \partial_{x_2} y + \partial_z h \partial_{x_2} z \\ &= 0 + \frac{1}{1+x_3^4} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{1+x_3^4}.\end{aligned}$$

Tehtävä 3. *Olkoot* $g : D \to \mathbb{R}^4$ *sekä*

$$g(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}, x_3 + x_1, x_2 + x_1),$$

jossa $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$. *Nähdään että* D *on avoin, sillä se on suljetun joukon komplementti. Vaihtoehtoisesti voidaan ottaa jokin avoin kuula,joka ei kohtaa tasoja* $x_1 = 0$,$x_2 = 0$ *(esimerkiksi kuula* $B((2, 2, 2), 1)$ *kelpaa).*

Laskemme tästä suoraan

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 & \partial_3 g_1 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 & \partial_3 g_2 \\ \partial_1 g_3 & \partial_2 g_3 & \partial_3 g_3 \\ \partial_1 g_4 & \partial_2 g_4 & \partial_3 g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2^2} & 0 \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tässä $g_1, \dots, g_1$ *ovat g:n komponenttikuvaukset. Esimerkiksi lasketaan* $\partial_2 g_1 = \partial_2 \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{x_2^2}$.

Tehtävä 4. *Olkoot* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x - \pi e^y, x + 2\pi y^y), g(x_1, x_2) = (\sin x_2, \cos x_1).$$

Muodostetaan yhdistetty kuvaus

$$(g \circ f)(x, y) = (\sin(x + 2\pi e^y), \cos(x - \pi e^y))$$

,josta laskemme

$$(g \circ f)'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + 2\pi e^y) & \cos(x + 2\pi e^y) 2\pi e^y \\ -\sin(x - \pi e^y) & \sin(x - \pi e^y) \pi e^y \end{pmatrix}.$$

Toisaalta voimme laskea

$$g' = \begin{pmatrix} 0 & \cos x_2 \\ -\sin x_1 & 0 \end{pmatrix}, f' = \begin{pmatrix} 1 & -\pi e^y \\ 1 & 2\pi e^y \end{pmatrix}.$$

Tästä saadaan ketjusäännöllä

$$(g \circ f)'(x,y) = g'(f(x,y))f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos f_2 \\ -\sin f_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\pi e^y \\ 1 & 2\pi e^y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(x + 2\pi e^y) & \cos(x + 2\pi e^y) 2\pi e^y \\ -\sin(x - \pi e^y) & \sin(x - \pi e^y)\pi e^y \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 5. *Lasketaan edellisen tehtävän tulos kohdassa* $x_0 = (\pi/2, 0)$. *Saadaan*

$$(g \circ f)'(x_0) = \begin{pmatrix} \cos(5\pi/2) & \cos(5\pi/2)\pi \\ -\sin(-\pi/2) & \sin(-\pi/2)\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\pi \end{pmatrix}.$$

Tästä saadaan kun $h = 2^{-10}(1,1)^T$

$$(g \circ f)'(x_0)h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\pi \end{pmatrix} 2^{-10} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^{-10}(1 + \pi) \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti kun $x_0 = (t, 2t)$ *ja* $h = (-1/100, 1/1000)^T$

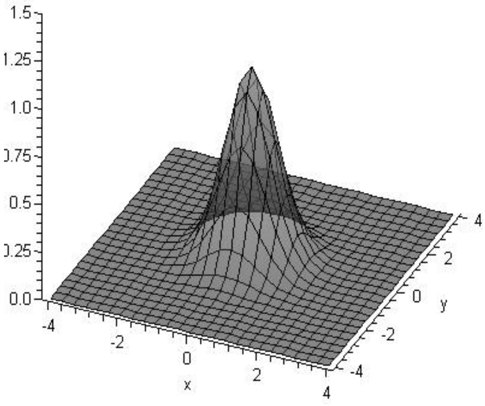
$$(g \circ f)'(x_0)h = \begin{pmatrix} \cos(t + 2\pi e^{2t}) & \cos(t + 2\pi e^{2t})2\pi e^{2t} \\ -\sin(t - \pi e^{2t}) & \sin(t - \pi e^{2t})\pi e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{100} \\ \frac{1}{1000} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{\cos(t+2\pi e^{2t})}{100} + \frac{\cos(t+2\pi e^{2t})2\pi e^{2t}}{1000} \\ \frac{\sin(t-\pi e^{2t})}{100} - \frac{\sin(t-\pi e^{2t})\pi e^{2t}}{1000} \end{pmatrix}.$$

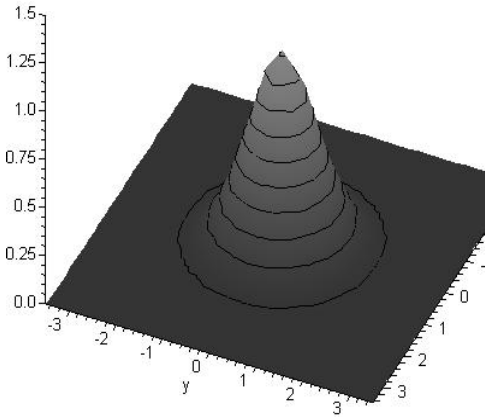
Tehtävä 6. *Olkoon* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $G(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. *Tällöin gradientille saadaan lauseke*

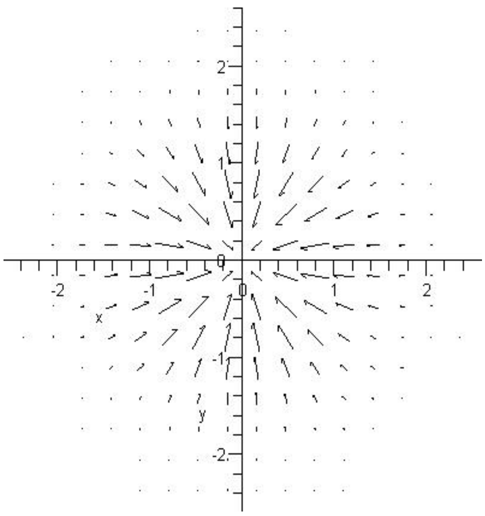
$$\nabla G = -2e^{-x^2-y^2}(x,y).$$

Nähdään että origossa gradientti häviää sekä muualla se osoittaa vektorin $-(x,y)$ *määräämään suuntaan. Huomataan erityisesti että gradienttin normi häviää origossa ja kun* $-(x,y)$ *:n normi kasvaa rajatta. Nähdään myös että kuvaaja on radiaalisesti symmetrinen (koska riip-puu vain* (x,y)*:n normista). Erityisesti* G*:n tasa-arvokäyrät ovat ympyröitä. Gradientin lausekkeesta voidaan todeta ,että siirryttäessä pisteestä* (x,y) *suuntaan* $\nabla G(x,y)$ *niin* G*:n arvojen kasvu on kaikkein voimakkain. Erityisesti origosta lähdettäessä* G*:n arvot laskevat (origossa on siis maksimi). Nähdään myös että gradientin voimakkuus on vakio* G*:n tasa-arvokäyrillä sekä gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyriä vastaan.*

Alla on G*:n kuvaaja. Oikeanpuolenmaisessa kuvassa näkyy* G*:n tasa-arvokäyriä. Alinmaisessa kuvassa on piirretty* G*:n gradienttikenttä* (x,y) *tasoon.Huomaa erityisesti vektoreiden suunta, sekä miten vektoreiden pituus käyttäytyy kun origosta poistutaan. Totea kuvista yllä olevat havainnot!*


1.5
1.25
1.0
0.75
0.5
0.25
0.0
-4
-2
0
2
4
x
4
2
0
y
-2
-4


1.5
1.25
1.0
0.75
0.5
0.25
0.0
-3
-2
-1
0
1
2
3
y
0
1
2
3


2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
x
y