1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 e^y$.

Tapa I. Seuraavia osittaisderivaattoja tarvitaan:

$\partial_1 f(x,y) = 2xe^y$, $\partial_2 f(x,y) = x^2 e^y$, $\partial_1\partial_1 f(x,y) = 2e^y$,
$\partial_1\partial_2 f(x,y) = 2xe^y$ ja $\partial_2\partial_2 f(x,y) = x^2 e^y$.

Koska $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$, niin toisen asteen Taylorin kehitelmä saadaan lauseen 2.8.4 perusteella.

(a) Pisteessä $(0,0)$: $f(h,k) = f(0+h, 0+k) = f(0,0) + \partial_1 f(0,0)h + \partial_2 f(0,0)k + 2^{-1}(\partial_1\partial_1 f(0,0)h^2 + 2\partial_1\partial_2 f(0,0)hk + \partial_2\partial_2 f(0,0)k^2) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k) = 0 + 0h + 0k + 2^{-1}(2h^2 + 2\cdot 0hk + 0k^2) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k) = \underline{h^2 + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k)}$,

missä B on jossain origon ympäristössä rajoitettu funktio.

(b) Pisteessä $(1,2)$: $f(1+h, 2+h) = f(1,2) + \partial_1 f(1,2)h + \partial_2 f(1,2)k + 2^{-1}(\partial_1\partial_1 f(1,2)h^2 + 2\partial_1\partial_2 f(1,2)hk + \partial_2\partial_2 f(1,2)k^2) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k) = e^2 + 2e^2h + e^2k + 2^{-1}(2e^2h^2 + 2\cdot 2e^2hk + e^2k^2) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k) = \underline{e^2 + 2e^2h + e^2k + e^2h^2 + 2e^2hk + \tfrac{1}{2}e^2k^2 + (h^2+k^2)B(h,k)}$,

missä B on jossain origon ympäristössä rajoitettu funktio.

Tapa II (tentävän lisäkysymyksen mukainen).

Tässä tarvitaan lisäksi seuraavia tietoja (tapauksissa $n=2$ ja $p=2$), joita ei löydy kirjasta.

1° Jos $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, $x_0 \in D$ ja jossain origon ympäristössä pätee kaikilla h

$$f(x_0+h) = T_p(h) + |h|^{p+1}B(h), \quad (*)$$

missä T_p on korkeintaan astetta p oleva polynomi, ja B on jossain origon ympäristössä rajoitettu funktio, niin kehitelmä $(*)$ on yksikäsitteinen.

2° Jos lisäksi $f \in C^{n+1}(D)$, niin kehitelmä (1) on sama kuin funktion f n. asteen Taylorin kehitelmä pisteessä x_0 (ts. polynomin T_P kertoimet saadaan f:n osittaisderivaattojen arvoista pisteessä x_0).

Nämä kaksi faktaa on todistettu yksiulotteisessa tapauksessa (eli kun $n=1$) Analyysi II -kurssilla ja Lauri Myrbergin kirjassa Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 2. (Todistukset ovat ymmärtääkseni lyhyet ja helppotajuiset.) Yleinen tapaus ($n \geq 1$) todistetaan oleellisesti samoin.

(a) Exponenttifunktiolle $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = e^y$ saadaan 0. asteen Taylorin kehitelmä (miksi tässä riittää 0. asteen Taylorin kehitelmä?) pisteessä 0:

$$g(k) = g(0+k) = g(0) + |k| B_1(k) = 1 + |k| B_1(k),$$

missä $B_1(k)$ on jossain origon ympäristössä rajoitettu funktio. Siten

$$f(h,k) = h^2 g(k) = h^2(1 + |k| B_1(k)) = h^2 + h^2 |k| B_1(k).$$

Asetetaan:

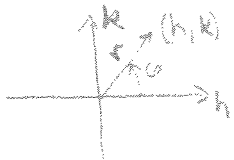
$$B(h,k) = \begin{cases} 0, & \text{kun } (h,k) = (0,0) \\ \dfrac{h^2 |k| B_1(k)}{(h^2+k^2)^{3/2}}, & \text{muulloin}. \end{cases}$$

Tällöin

$$f(h,k) = h^2 + (h^2+k^2)^{3/2} B(h,k).$$

Vielä on osoitettava, että B on rajoitettu jossain origon ympäristössä, siirrytään tätä varten napakoordinaatteihin

$$\begin{cases} h = r\cos\varphi \\ k = r\sin\varphi \end{cases}, \quad r \geq 0 \text{ ja } \varphi \in [0, 2\pi)$$



Kun $(h,k) \neq (0,0)$,

$$B(h,k) = \frac{r^2 \cos^2(\varphi)\, r |\sin(\varphi)| B_1(r\sin(\varphi))}{(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = \frac{r^3 \cos^2\varphi |\sin\varphi| B_1(r\sin\varphi)}{r^3 (\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1})^{3/2}} = \cos^2(\varphi) |\sin(\varphi)| B_1(r\sin\varphi)$$

Siis B on rajoitettu eräässä $\mathbb{R}^2$:n origon ympäristössä, koska B_1 on rajoitettu eräässä $\mathbb{R}$:n origon ympäristössä.

(b) Exponenttifunktiolle $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(y)=e^y$ saadaan 2. asteen Taylorin kehitelmä pisteessä 2 (miksi tässä tarvitaan 2. asteen Taylorin kehitelmää?):

$$g(2+k) = g(2) + g'(2)k + \frac{g''(2)}{2!}k^2 + |k|^3 B_1(k)$$
$$= e^2 + e^2 k + \tfrac{1}{2}e^2 k^2 + |k|^3 B_1(k),$$

missä B_1 on jossain origon ympäristössä rajoitettu funktio. Nyt

$$f(1+h,2+k) = (1+h)^2 g(2+k) = (1+2h+h^2)(e^2 + e^2 k + \tfrac{1}{2}e^2k^2 + |k|^3B_1(k)) = e^2 + e^2k + \tfrac{1}{2}e^2k^2 + |k|^3B_1(k) + 2e^2h + 2e^2hk + e^2hk^2 + 2h|k|^3B_1(k) + e^2h^2 + e^2h^2k + \tfrac{1}{2}e^2h^2k^2 + h^2|k|^3B_1(k)$$
$$= e^2 + 2e^2h + e^2k + e^2h^2 + 2e^2hk + \tfrac{1}{2}e^2k^2 + (|k|^3B_1(k) + e^2hk^2 + 2h|k|^3B_1(k) + e^2h^2k + \tfrac{1}{2}e^2h^2k^2 + h^2|k|^3B_1(k))$$

missä sulkuissa oleva lauseke voidaan kirjoittaa muotoon $(h^2+k^2)^{3/2}B(h,k)$, missä B on jossain origon ympäristössä rajoitettu funktio. Tämä voidaan osoittaa samaan tyyliin kuin (a)-kohdassa, yksityiskohdat jätetään lukijalle.

2 (a) $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u(x,y)=e^{x^2+y^2}$.

$$\partial_1 u(x,y) = 2x e^{x^2+y^2}, \quad \partial_{11} u(x,y) = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2}$$
$$\partial_2 u(x,y) = 2y e^{x^2+y^2}, \quad \partial_{22} u(x,y) = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2}.$$

Siis $\partial_{11}u(x,y) + \partial_{22}u(x,y) = (2+4x^2+2+4y^2)e^{x^2+y^2} = 4(\underbrace{1+x^2+y^2}_{>0})\underbrace{e^{x^2+y^2}}_{>0} \neq 0$ kaikilla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Siis u ei ole harmooninen missään tason osajoukossa.

(b) $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $v(x,y) = x^4 - ax^2y^2 + y^4$.

$$\partial_1 v(x,y) = 4x^3 - 2axy^2, \quad \partial_{11} v(x,y) = 12x^2 - 2ay^2$$
$$\partial_2 v(x,y) = -2ax^2y + 4y^3, \quad \partial_{22} v(x,y) = -2ax^2 + 12y^2.$$

Siis $\partial_{11} v(x,y) + \partial_{22} v(x,y) = 12x^2 - 2ay^2 - 2ax^2 + 12y^2 =$
$(12-2a)x^2 + (12-2a)y^2 = 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$
$\underline{\underline{a = 6}}$.

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^4 - 3xy^3 + 3xz + 2$.

$\nabla f(x,y,z) = (\partial_1 f(x,y,z), \partial_2 f(x,y,z), \partial_3 f(x,y,z)) =$
$(4x^3 - 3y^3 + 3z, -9xy^2, 3x) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4x^3 - 3y^3 + 3z = 0 \\ -9xy^2 = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y^3 + 3z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y^3 \\ x = 0 . \end{cases}$$

Vastaus: funktion f kriittiset pisteet ovat $(0, t, t^3)$, missä $t \in \mathbb{R}$.

(4) Tod. Olkoon $g : [0,1] \to I$, $g(t) = ty + (1-t)x$. Funktio g on jatkuva, mikä nähdään esimerkiksi siitä, että $|g(t) - g(t_0)| = |(t-t_0)y - (t-t_0)x| = |t-t_0| \cdot |y-x|$. Asetetaan $\varphi = f \circ g$, jolloin $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Koska $f \in C^1(D)$, niin f on derivoituva (eli differentioituva) D:ssä Lauseen 2.5.2 perusteella. Lisäksi g:n komponenttifunktiot $g_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_j(t) = ty_j + (1-t)x_j$, ovat derivoituvia välillä $(0,1)$. Niinpä ketjusäännön (Lause 2.5.9) perusteella φ on derivoituva välillä $(0,1)$ ja

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(g(t))\, g_j'(t) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(g(t))(y_j - x_j), \quad t \in (0,1).$$

Koska φ on saatu yhdistämällä jatkuvista funktioista, on se jatkuva välillä $[0,1]$. Koska se on lisäksi derivoituva välillä $(0,1)$, niin yhden muuttujan väliarvolauseen (Analyysi I) perusteella

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0)(1-0), \quad \text{jollain } t_0 \in (0,1).$$

Koska $\varphi(1) = f(y)$ ja $\varphi(0) = f(x)$, saadaan

$$f(y)-f(x) = \varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(t_0)(1-0) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(g(t_0))(y_j-x_j)$$
$$= \nabla f(g(t_0))\cdot(y-x).$$

Lisäksi tietenkin $g(t_0) \in I$. □

(5) Olkoot e_0 ja π_0 luvuille e ja π käytetyt likiarvot. Olkoon $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y = e^{\ln x^y} = e^{y \ln x}$, missä $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0 \text{ ja } y>0\}$. Nyt

$\partial_1 f(x,y) = y x^{y-1}$ ja $\partial_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{y\ln x} = \ln(x) e^{y \ln x} = x^y \ln x$,

siis $\nabla f(x,y) = (yx^{y-1}, x^y \ln x)$. Edellisen tehtävän mukaan

$$f(e,\pi) - f(e_0,\pi_0) = \nabla f(\xi)\cdot((e,\pi)-(e_0,\pi_0))$$
$$= \partial_1 f(\xi)(e-e_0) + \partial_2 f(\xi)(\pi-\pi_0),$$

jollain $\xi \in I = \{t(e,\pi) + (1-t)(e_0,\pi_0) \mid t \in [0,1]\}$. (Huom: $I \subset D$, sillä D sisältää kaikkien pistepariensa yhdysjanat, katso sivun 6 alalaidan huomautus.) Siten

$$|f(e,\pi) - f(e_0,\pi_0)| \le |\partial_1 f(\xi)|\cdot|e-e_0| + |\partial_2 f(\xi)|\cdot|\pi-\pi_0|$$

jollain $\xi \in I$. Adetaan tunnettuna, että $2<e<3$ ja $3<\pi<4$. Tällöin on myös järkevää vaatia, että $2<e_0<3$ ja $3<\pi_0<4$. Koska (Huom: $t \in [0,1]$)

$$\xi_1 = te + (1-t)e_0 \begin{cases} > t2 + (1-t)2 = 2 \\ < t3 + (1-t)3 = 3 \end{cases}$$ ja

$$\xi_2 = t\pi + (1-t)\pi_0 \begin{cases} > t3 + (1-t)3 = 3 \\ < t4 + (1-t)4 = 4, \end{cases}$$

niin myös $2<\xi_1<3$ ja $3<\xi_2<4$. Siksi

$$|\partial_1 f(\xi)| = \xi_2 \xi_1^{\xi_2-1} < 4\cdot 3^{4-1} = 4\cdot 3^3 = 108$$ ja

$$|\partial_2 f(\xi)| = \xi_1^{\xi_2} \ln \xi_1 < 3^4 \ln 4 = 81 \ln 2^2 < 81 \ln e^2 = 81\cdot 2 \ln e = 162,$$

Siis, kun merkitään $\Delta = \max\{|e-e_0|, |\pi-\pi_0|\}$, saadaan

$$|f(e,\pi) - f(e_0,\pi_0)| < 108\,\Delta + 162\,\Delta = 270\Delta < 0{,}001.$$

Tämä pätee kun $\Delta < 0{,}001/270 \approx 0{,}000004$.

Vastaus: Riittää, kun molemmista tunnetaan kuusi desimaalia.

⑥ Käytetään kirjan (1. painos) sivulla 66 olevia kriteerejä.

(a) $Q(h,k) = h^2 - 6hk + 2k^2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2-(-3)^2 = 2-9 = -7 < 0.$$

Siten Q on indefiniitti.

(b) $R(h,k) = 4hk - 4h^2 - k^2$.

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4-2^2 = 0.$$

Siten R on semidefiniitti. Koska lisäksi esim. $R(0,1) = -1 < 0$, R on negatiivisesti semidefiniitti.

Huomautus tehtävään 5.

$$t(e,\pi) + (1-t)(e_0,\pi_0) = (e_0,\pi_0) + t(e-e_0, \pi-\pi_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

on pisteiden (e_0,π_0) ja (e,π) kautta kulkeva suora. Kun rajoitetaan $t \in [0,1]$, saadaan näitä pisteitä yhdistävä jana.