VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 9
SYKSY 2008

1. Olkoon $T \subset \mathbf{R}^3$ tetraedri (neljän tason rajoittama kappale), jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$. Laske

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz,$$

kun $f(x,y,z) = y$. Ohje. Piirrä kuva. Integroimisrajat voit johtaa esimerkiksi seuraavasti. Tarkastele ensin x– ja y–koordinaatteja: voit esim. olettaa, että $x \in [0,1]$. Muuttujan y integroimisrajat riippuvat tämän jälkeen x:stä. Seuraavaksi, z:n integroimisrajat riippuvat sekä x:stä että y:stä. Lopuksi, integroi ensin z, sitten y, sitten x.

2. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^3$ kappale, jota rajoittaa yläpuolelta taso $z = 3 - 2y$ ja alapuolelta paraboloidi $z = x^2 + y^2$. Laske A:n tilavuus, eli integroi vakiofunktio 1 yli joukon A. Ohje. Muuttujan z integroimisrajat määräytyvät suoraan annetuista pinnoista. Mitä tulee muihin muuttujiin, mainittujen pintojen leikkaus sijaitsee sylinteripinnalla S, joka on muotoa

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2\},$$

missä a, b ja c ovat reaalilukuja. Määrää ensin nämä luvut. Tästä saat integroimisrajat x:lle ja y:lle. (Lasku onnistuu käytännössä ainakin niin, että x:n rajat lausuu y:n funktiona. Integroimisjärjestys siis: $z; x; y$.)

3. Laske integraali

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz,$$

kun $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ ja $B \subset \mathbf{R}^3$ on 1. oktantissa sijaitseva kappale, jota rajoittavat sylinteripinnat $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 + y^2 = 4$, sekä tasot $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$ ja $x = y$. Ohje. On luontevaa käyttää sylinterikoordinaatteja (r, φ, z), missä r ja φ vastaavat $x-y$–tason napakoordinaatteja ja z on alkuperäinen. Tätä vastaavan koordinaattimuunnoksen jakobiaani on sama kuin napakoordinaattien eli r. Integroimisrajoista tulee vakoita.

4. Kuten tehtävä 2, mutta A:ta rajoittaa yläpuolelta pallopinta $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ ja alapuolelta paraboloidi $z = x^2 + y^2$. (Jälleen on kätevä käyttää sylinterikoordinaatteja. Voit käyttää tietoa, että pallopinta ja paraboloidi leikkaavat sylinteripinnalla $r = \sqrt{2}$.)

5. Osoita, että

$$\int_\gamma f ds = 0,$$

kun $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) := x_2$ ja $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) := (0,0,t)$.

6. Laske

$$\int_\Gamma y dx - x dy + dz,$$

kun Γ on jana, jonka alkupiste on $(1,0,0)$ ja loppupiste $(0,1,1)$.

Merkintä

$$\int_\Gamma y dx - x dy + dz$$

tarkoittaa oppikirjan merkinnöin käyräintegraalia

$$\int_\Gamma F \cdot d\bar{s},$$

missä $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ on vektorikenttä $F(x,y,z) := (y, -x, 1)$.