

VEKTORIANALYYSI  
LASKUHARJOITUS 7  
SYKSY 2008

1. Laske

$$\int_D f dA$$

kun  $D$  on kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  ja  $(1, 1)$ , sekä

$$\text{a) } f(x, y) := xy^2, \quad \text{b) } f(x, y) := \frac{xy}{3 + x^4}$$

2. Laske  $\int_D f dA$ , kun

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 5 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq x^2\}$$

ja

$$\text{a) } f(x, y) := x^2 + xy + y^2, \quad \text{b) } f(x, y) := \cos(\pi x) - xe^{-y}.$$

3. Olkoon  $G$  kolmio, jonka pisteet  $(x, y)$  toteuttavat  $0 \leq x \leq \pi/2$  ja  $0 \leq y \leq x$ . Laske integraali

$$\iint_G (x^3y + \cos x) dx dy.$$

4. Olkoot  $A, B \subset \mathbf{R}^2$  sekä  $A \subset B$ . Osoita, että jos  $B$  on nollajoukko, niin myös  $A$  on nollajoukko.

5. Olkoot funktiot  $f : [0, 1] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sekä  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  jatkuvia. Oletetaan lisäksi, että  $g(x) > 0$  kaikilla  $x \in [0, 1]$ . Osoita, että funktio  $H : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$H(x) = \int_0^{g(x)} f(x, y) dy$$

on jatkuva.

6. Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  jatkuva. Osoita, että

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) dy dx = \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2.$$