VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 5
SYKSY 2008

1. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funktio

a) $f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + x - y,$ b) $f(x,y) := x^3 - y^3 + 3xy.$

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

2. Samoin, kun

a) $f(x,y) := (4 - x^2 - y^2)e^{x+y},$ b) $f(x,y) := x^3 - 4xy^2 + x^2.$

(Kohta b): tarkastele arvoja x–akselilla ja paraabelilla $y^2 = x$.)

3.–4. Olkoon $f \in C^1(\mathbf{R})$ funktio, jolla on täsmälleen yksi kriittinen piste, missä sillä on aito lokaali minimi. Osoita, että tämä piste on myös f:n aito absoluuttinen minimi. Osoita esimerkillä, että vastaava ei päde kahden muuttujan funktioille $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Voit tutkia esimerkiksi funktiota

$$f(x,y) := -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}},$$

jonka ainoa aito lokaali minimipiste on $(0,0)$.

5. Olkoon $D := \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = -2\}$ ja tarkastellaan pintaa $r(D) \subset \mathbf{R}^3$, missä

$$r(x,y) := (x, y, 1/(x+2) + xe^{-y^2})$$

Esitä tämän normaalivektori ja tangenttitason yhtälö pisteessä a) $r(-1,-1)$, b) $r(3,2)$.

6. Implisiittifunktiolause: Olkoon $f \in C^1(D)$, missä $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ avoin, ja oletetaan, että pisteessä $(a,b) \in D$ (tässä $a \in \mathbf{R}^n$ ja $b \in \mathbf{R}$) pätee

$$f(a,b) = 0, \qquad \partial_{n+1} f(a,b) \neq 0.$$

Tällöin on olemassa pisteen a ympäristö $B(a,r) \subset \mathbf{R}^n$ ja pisteen b ympäristö $B(b,s) \subset \mathbf{R}$, joille pätee: kun $x \in B(a,r)$, niin yhtälöllä

$$f(x,y) = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $y = y(x) =: \phi(x) \in B(b,s)$. Näin määritelty (“implisiitti”)funktio $\phi : B(a,r) \to B(b,s)$ on kerran jatkuvasti derivoituva, ja sen 1. kertaluvun osittaisderivaatat saadaan kaavasta

$$\partial_i \phi(x) = -\frac{\partial_i f(x,\phi(x))}{\partial_{n+1} f(x,\phi(x))} \quad , \quad i = 1,\ldots,n,$$

Sovella tätä lausetta tapauksessa $n = 1$: osoita, että yhtälö $x^4 + y^4 - 2xy = 0$ määrittelee polun (luentojen määritelmän mielessä) pisteen $(1,1)$ ympäristössä. Esitä ko. pisteen kautta kulkevan tangentin yhtälö.