VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 4
SYKSY 2008

1. Olkoon f kahden muuttujan funktio $f(x, y) := x^2 e^y$. Esitä sen toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä a) $(0, 0)$ b) $(1, 2)$. Osaatko johtaa kehitelmän tavanomaisesta yhden muuttujan eksponenttifunktion Taylor–kehitelmästä?

2. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ avoin. Sanomme, että funktio $u \in C^2(D)$ on harmoninen joukossa D, jos

$$\partial_{11} u + \partial_{22} u = 0$$

kaikkialla joukossa D.
a) Onko funktio

$$u(x, y) := e^{x^2+y^2}$$

harmoninen jossain tason osajoukossa?
b) Määritä vakio $a \in \mathbf{R}$ siten, että funktio

$$v(x, y) = x^4 - ax^2y^2 + y^4$$

on harmoninen koko tasossa.

3. Määritä funktion $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y, z) := x^4 - 3xy^3 + 3xz + 2$$

kriittiset pisteet.

4. Todista väliarvolause avaruudessa $\mathbf{R}^n$: Olkoon $D \subset \mathbf{R}^n$ avoin, $f \in C^1(D)$, $x, y \in D$, ja jana

$$I := \{ty + (1 - t)x \mid t \in [0, 1]\} \subset D.$$

Tällöin on olemassa sellainen $\xi \in I$, että

$$f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y - x).$$

Neuvo. Tarkastele funktiota $\varphi(t) := f(ty + (1 - t)x)$, missä $t \in [0, 1]$.

5. Kuinka monta desimaalia luvuista e ja π on tunnettava, että luku e^π saadaan laskettua tarkkuudella $0,001$? Neuvo. Sovella edellisessä tehtävässä esitettyä väliarvolausetta sopivaan kahden muuttujan funktioon.

6. Tutki seuraavien neliömuotojen definiittisyyttä:
a) $Q(h, k) := h^2 - 6hk + 2k^2$, b) $R(h, k) := 4hk - 4h^2 - k^2$.