VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 3
SYKSY 2008

1. Olkoot $w : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$w(x_1, x_2, x_3) := \left(x_2, \frac{x_1}{1 + x_2^2}, e^{x_1 x_3}\right)$$

ja $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$h(x, y, z) = x + 2y - z,$$

sekä $f := h \circ w$. Muodosta $\partial_2 f$ ja $\partial_3 f$ a) suoraan laskemalla yhdistetyn funktion lauseke, b) ketjusäännön avulla.

2. Kuten edellä, laske $\partial_1 f$ ja $\partial_2 f$, kun

$$w(x_1, x_2, x_3) := (x_3^2, x_1 + x_2, x_1^2 + x_3^2)$$

ja

$$h(x, y, z) = \frac{y - z}{1 + x^2},$$

3. Olkoon g funktio $D \to \mathbf{R}^4$, missä D on sopiva $\mathbf{R}^3$:n avoin osajoukko; funktion g lauseke on

$$g(x_1, x_2, x_3) := \left(\frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}, x_3 + x_1, x_2 + x_1\right).$$

Laske $g'(x)$, kun x kuuluu valitsemaasi epätyhjään joukkoon D.

4. Olkoot $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$g(x_1, x_2) := (\sin x_2, \cos x_1)$$

ja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$f(x, y) = (x - \pi e^y, x + 2\pi e^y).$$

Laske $(g \circ f)'(x_0)$ mielivaltaisessa $\mathbf{R}^2$:n pisteessä a) suoraan laskemalla yhdistetyn funktion lauseke, b) ketjusäännön avulla.

5. Laske edellisen tehtävän funktioille lauseke $(g \circ f)'(x_0)h$, kun
a) $x_0 := (\pi/2, 0)$ ja $h := 2^{-10}(1, -1)$,
b) $x_0 := (t, 2t)$ ($t \in [0, 100]$) ja $h := (-1/100, 1/1000)$.

6. Laske funktion $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $G(x, y) := e^{-x^2 - y^2}$ gradientti mielivaltaisessa pisteessä $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Piirrä G:n kuvaaja. Ota muutamia esimerkkipisteitä tasosta, ja tarkastele niissä gradientin suuntaa ja toisaalta G:n kuvaajaa. Tee havaintoja. (Asiaan palataan.)