VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 2
SYKSY 2008

1. Olkoon $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}.$$

Onko olemassa raja–arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad ?$$

2. Samoin, kun

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^4 + 2y^2}.$$

3. Muodosta funktion
a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) := e^{xy} + e^x \cos(x + y^2)$ osittaisderivaatat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

b) $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $g(x_1, x_2, x_3) := e^{x_1^2 + x_2^2} + \sin^2 x_1 + \cos^2 x_3$, osittaisderivaatat $D_1 g$, $D_2 g$ ja $D_3 g$.

4. Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, jolla $\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 0$ jokaisella $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, mutta f ei ole jatkuva.

5. Määritellään funktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ siten, että $f(2,0) = 0$ ja

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_2^3}{|x - (2,0)|} \quad ,$$

kun $x = (x_1, x_2) \neq (2,0)$. Osoita, että f on derivoituva koko tasossa $\mathbf{R}^2$.

6. Määritellään funktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) := xe^{y^2}.$$

Laske $\nabla f(1,1)$. Onko olemassa pisteitä $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, jossa $\nabla f(x,y) = 0$?