VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 10
SYKSY 2008

1. Laske

$$\int_{\Gamma} (3x - 2y)dx + (y + 2z)dy - x^2 dz,$$

kun $\Gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ ja parametri t valitaan siten, että Γ:n alkupiste on origo ja loppupiste $(1, 1, 1)$.

2. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali:
a) $F(x, y) := (y, y^2)$,
b) $F(x, y) := (x, y + 2)$.

3. Oletetaan, että vektorikenttä $F = (F_1, F_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, on eksakti. Onko kenttä $G := (F_2, F_1)$ myös eksakti?

4. Osoita, että vektorikenttä $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$F(x, y, z) := (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z)$$

on eksakti, ja määrää jokin sen potentiaali. (Ohje. Vektorikentän eksaktius korkeammissa dimensioissa määritellään kuten tason tapauksessa, eli vaaditaan, että on olemassa jatkuvasti derivoituva skalaarifunktio u, jolle $\nabla u = F$. Mikäli määrittelyalue on esimerkiksi $\mathbf{R}^3$, saadaan eksaktisuudelle välttämätön ja riittävä ehto komponenttien osittaisderivaattoja koskevista yhtälöistä (3 kpl), kuten dimensiossa 2. Potentiaalin laskemiseksi joudutaan yleensä ratkaisemaan kolme differentiaaliyhtälöä.)

5. Osoita, että tason avoin, konveksi osajoukko on yhdesti yhtenäinen. Ohje. Joukko A on konveksi, mikäli $tx + (1 - t)y \in A$ aina, kun x, $y \in A$ ja $0 < t < 1$. Joukko A on yhdesti yhtenäinen, jos jokainen A:n suljettu polku $\gamma : [0, 1] \to A$ voidaan kutistaa pisteeksi jatkuvilla muunnoksilla; täsmällisesti, jos γ on kuten edellä, on olemassa piste $a \in A$ ja jatkuva kuvaus $h : [0, 1] \times [0, 1] \to A$, jolle

$$h(0, t) = \gamma(t) \text{ ja } h(1, t) = a \text{ kaikilla } t \in [0, 1].$$

Lopuksi, voit esim. olettaa, että $\bar{0} \in A$.

6. Laske vektorikentän $F(x, y) = (x^2 y, -xy^2)$ käyräintegraali pitkin kiekon $B(0, 10)$ reunaa.