Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Harjoitus 8
Mallit (HL)

Tehtävä 1. *Olkoot* $D = \bar{B}(0,1) - B(0, \frac{1}{2})$, *laskettava annettu integraali. Siirtymällä polaarikoordinaatteihin ja osittaisintegroimalla saadaan*

$$\begin{aligned}
&\int_D \log(x^2+y^2)dA = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{2\pi} \log(r^2) r dr d\theta \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 2\pi \log(r^2) r dr \\
&= 2\pi(\frac{1}{2} r^2 \log r^2 |_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \frac{1}{r^2} 2r dr) \\
&= \frac{\pi}{4}(\log 4 - 3)
\end{aligned}$$

Tehtävä 2. *Lasketaan ensin integraali yli suorakaiteen* $[-10,10] \times [-5,10]$, *josta vähennetään integraali yli kiekon. Integraaliksi yli suorakaiteen saadaan*

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-10}^{10}\int_{-5}^{10} (x+y) dy dx = 0 + \int_{-10}^{10}\int_{-5}^{10} y dy dx \\
&= 750.
\end{aligned}$$

Kiekon yli saadaan

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta + r\sin\theta) r d\theta dr \\
&= \int_0^1 r^2 (\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta) dr = 0 + 0.
\end{aligned}$$

Siis haluttu integraali on

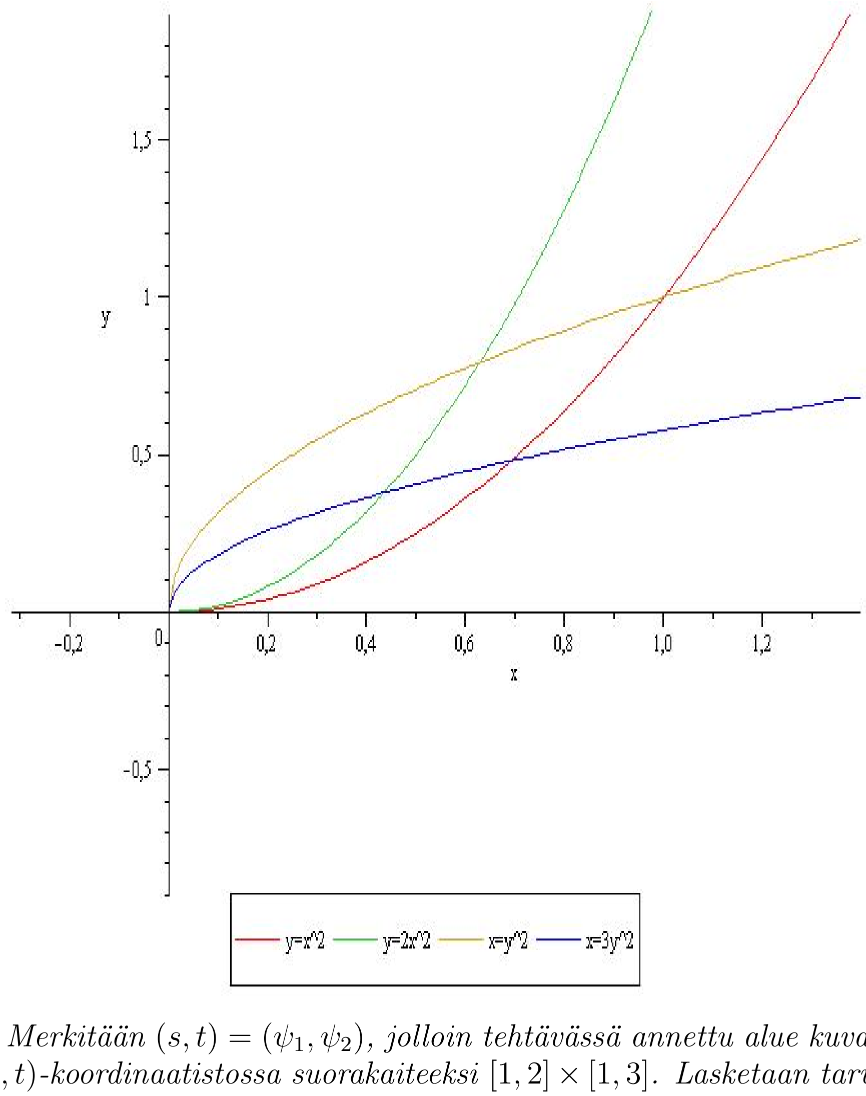
$$I = I_1 - I_2 = 750.$$

Tehtävä 3. *Merkitään reunakäyriä seuraavasti*

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^2 \\
f_2(x) &= 2x^2 \\
g_1(x) &= \sqrt{x} \\
g_2(x) &= \sqrt{3x} \\
\psi(x,y) &= (\frac{y}{x^2}, \frac{x}{y^2}).
\end{aligned}$$

Katsotaan miten alueen reuna kuvautuu kuvauksessa ψ. Lasketaan ensin

$$\psi(x, f_1(x)) = (1, \frac{1}{x^3})$$
$$\psi(x, f_2(x)) = (2, 4\frac{1}{x^3})$$
$$\psi(x, g_1(x)) = (\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, 1)$$
$$\psi(x, g_2(x)) = (\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}, 3).$$



Merkitään $(s, t) = (\psi_1, \psi_2)$, jolloin tehtävässä annettu alue kuvautuu (s, t)-koordinaatistossa suorakaiteeksi $[1, 2] \times [1, 3]$. Lasketaan tarvittavat jakobiaanit. Ensin lasketaan kuvauksen ψ jakobiaani. Rutiinilasku antaa

$$J(\psi) = \frac{3}{x^2y^2}.$$

Havaitsemalla että $st = \frac{1}{xy}$ *saadaan* $\frac{3}{x^2y^2} = s^2t^2$, *jolloin tarvittava jakobiaani on*

$$J(\psi^{-1}) = \frac{1}{3s^2t^2}.$$

Nyt voidaan alueen ala laskea

$$\int_1^2 ds \int_1^3 dt \frac{1}{3s^2t^2} = \frac{1}{9}.$$

Tehtävä 4. *Laskettava epäoleellinen integraali*

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{x^2y^2} dydx.$$

Todetaan ensin että integroitava on positiivinen. Olkoot $a, b > 1$

$$\begin{aligned}\int_1^a \int_1^b \frac{1}{x^2y^2} dydx &= \int_1^a \frac{1}{x^2}(-\frac{1}{y}|_{y=1}^{y=b}) \\ &= \frac{1}{x}|_{x=1}^{x=a} \frac{1}{y}|_{y=1}^{y=b} = (1 - \frac{1}{a})(1 - \frac{1}{b}).\end{aligned}$$

Nähdään välittömästi että epäoleellinen integraali on olemassa ja sen arvo on 1. *Formaalimmin voimme määritellä numeroituvan peitteen joukolle*

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x < \infty, 1 \le v < \infty\},$$

esim.

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x \le n, 1 \le v \le n\},$$

joille $B_n \subset B_{n+1}$ *sekä* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B$. *Todetaan tarkasteltava kuvaus integroituvaksi joukoissa* B_n *ja tarkastellaan integraaleja kun* n *kasvaa rajatta. Päädytään kuten edellä tulokseen*

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{x^2y^2} dydx = \lim_{n \to \infty} \int_{B_n} \frac{1}{x^2y^2} dydx = 1.$$

Tehtävä 5. *Laskettava epäoleellinen integraali*

$$\int_0^1 \int_0^{v^2} \frac{dudv}{(u + v)^2}.$$

Tässä integraali on epäoleellinen koska integroitava ei ole rajoitettu kulmapisteen $(0, 0)$ *ympäristössä. Todetaan kuitenkin että integroitava on ei-negatiivinen. Tarkastellaan ensin sisinmäistä integraalia*

$$\int_0^{v^2} \frac{du}{(u + v)^2}.$$

Muuttujanvaihdolla $v^2t = u$ *nähdään että voimme yhtä hyvin tutkia integraalia*

$$I(v) = \int_0^1 \frac{v^2dt}{(v^2t + v)^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(vt + 1)^2},$$

kun $v \ne 0$. *Nähdään kuitenkin alkuperäisestä integraalista että tapauksessa* $v = 0$ *on* $I(v) = 0$ *(tapaus v=0 vastaisi nollajoukkoa, joten* *voimme yhtähyvin olettaa $v > 0$). Huomaa että nyt jälkinmäinen on tavallinen Riemann integraali kun $v \in [0,1]$.*

Nyt käyttämällä arviota $(vt+1)^2 \geq 1$ saadaan

$$I \leq \int_0^1 \frac{dt}{(vt+1)^2} \leq 1.$$

Siis erityisesti $I(v)$ integroituva välillä $[0,1]$. Tällöin erityisesti myös epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \int_0^{v^2} \frac{dudv}{(u+v)^2},$$

on olemassa.

Nyt

$$I = -\frac{1}{v^2 t + v}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{v+1},$$

josta saadaan

$$\int_0^1 \frac{1}{v+1} dv = \log 2.$$

Vaihtoehtoisesti integroidaan yli joukkojen

$$B_n = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq v^2, \frac{1}{n} \leq v \leq 1\},$$

joille $B_n \subset B_{n+1}$ sekä

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq v^2, 0 \leq v \leq 1\} - (0,0) = B.$$

Huomaa että nyt integraalit yli joukkojen B_n ovat olemassa tavallisina Riemann-integraaleina. Riittää siis tutkia rajaa $n \to \infty$. Lasketaan suoraan

$$\begin{aligned}\int_{B_n} \frac{dudv}{(u+v)^2} &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \int_0^{v^2} \frac{dudv}{(u+v)^2} \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dv}{v+1} = \log \frac{2}{1+\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Nähdään että kun n kasvaa rajatta niin $\int_{B_n} \frac{dudv}{(u+v)^2} \to \log 2$.

Tehtävä 6. *Todetaan integroitava ensin ei-negatiiviseksi. Olkoot $1 > a > 0$. Siirtymällä jälleen polaarikoordinaatteihin saadaan*

$$I_\alpha = \int_a^1 \int_0^{2\pi} \frac{rdr}{r^\alpha} d\theta = 2\pi \int_a^1 \frac{dr}{r^{\alpha-1}}.$$

Kun $\alpha < 2$, niin $I_\alpha = \frac{2\pi}{2-\alpha}(1 - a^{2-\alpha}) \to \frac{2\pi}{2-\alpha}$, kun $a \to 0$.
Kun $\alpha > 2$, niin $I_\alpha = \frac{-2\pi}{\alpha-2}(1 - a^{2-\alpha}) \to \infty$, kun $a \to 0$.
Kun $\alpha = 2$, niin $I_\alpha = -2\pi \log(a) \to \infty$, kun $a \to 0$.
Siis integraali suppenee kun $\alpha < 2$.