Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Harjoitus 6
Mallit (HL)

Tehtävä 1. *Olkoon* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$. *Etsittävä kuvauksen suurin ja pienin arvo suljetussa yksikkökiekossa. Näiden olemassa olo seuraa helposti kompaktisuudesta ja jatkuvuudesta. Edetään kirjan esittämän menetelmän mukaan. Ensin tarkistetaan kiekon sisäosa. Osittaisderivaatat ovat*

$$\partial_x f = 3x^2 - 3y^2$$
$$\partial_y f = -6xy.$$

Ainoaksi kriittiseksi pisteeksi saadaan origo. Tässä ei kuitenkaan ole ääriarvoa, mikä nähdään rajoittamalla kuvausta x-akselille $f(x,0) = x^3$. *Pitää vielä tarkastella kiekon reuna. Merkitään tarvittavaa ehtoa* ϕ*:llä , jossa*

$$\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Käytetään Lagrangen-kertoja menetelmää. Mahdolliset kriittiset pisteet saadaan siis yhtälöistä

$$\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$\partial_x f + \lambda \partial_x \phi = 3x^2 - 3y^2 + 2\lambda x = 0$$
$$\partial_y f + \lambda \partial_y \phi = -6xy + 2\lambda y = 0.$$

Alimmasta saadaan ratkaistua $\lambda = 3x$, *kun* $y \neq 0$ *ja* $\lambda = -\frac{3}{2}x$ *kun* $y = 0$. *Ensinmäinen johtaa sijoittamalla keskinmäiseen ehtoon* $y^2 = 3x^2$. *Jälkinmäinen antaa tietenkin* $x = \pm 1$. *Käyttämällä vielä ensinmäistä ehtoa saadaan* $x^2 = \frac{1}{4}$, *josta* $y^2 = \frac{3}{4}$. *Siis mahdolliset kriittiset pisteet ovat* $(\pm 1, 0), (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, *missä jälkinmäisessä kaikki merkkikombinaatiot ovat mahdollisia. Lasketaan* f *:n arvot näissä pisteissä*

$$f(\pm 1, 0) = \pm 1$$
$$f(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1$$
$$f(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1.$$

Siis suurin arvo on 1 *ja pienin* -1.
Huomautus 1*: tehtävä voidaan voidaan ratkaista myös ilman Lagrangen kertojaa sijoittamalla* $y^2 = 1 - x^2$. *Jos sisäpisteessä ääriarvonlaatua ei ole selvitetty, niin se tulee lisätä laskettavien arvojen joukkoon yllä.*

Huomautus 2*: kompleksianalyysiä tuntevat saattavat huomata että f on harmoninen, joten se saa ääriarvonsa reunalla koska ei ole vakio.*

Lasketaan vielä tehtävä läpi tuolla huomautuksen tavalla. On huomattava että joudumme käyttämään kahta sijoitusta $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ vaikka sijoitukset antavatkin saman funktion. Ensin laskemme

$$g(x) = \phi(x, \pm\sqrt{1-y^2}) = x^3 - 3x(1-x^2) = 4x^3 - 3x.$$

Saadaan suljetulla välillä $[-1, 1]$ jatkuva kuvaus, joka on derivoituva sisäpisteissä. Tilanne palaa siis kurssiin analyysi 1. Ratkaistaan ensin yhtälö

$$g'(x) = 12x^2 - 3 = 0,$$

josta saadaan $x = \pm\frac{1}{2}$. Nyt muistetaan että on huomiotava molemmat sijoitukset eli $y = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Päädyt pitää tarkastaa erikseen jolloin saadaan pisteet $(\pm 1, 0)$. Eli samat mitkä yllä.

Tehtävä 2. *Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy - y$. Etsittävä suurin ja pienin arvo alueessa $-x \leq y \leq x^3$ kun $0 \leq x \leq 2$. Nämä ovat jälleen olemassa samoin perustein kuten edellä. Huomataan että annetussa alueessa on kulma pisteet $(0, 0), (2, -2), (2, 8)$, jotka on muistettava tarkistaa.*

Osittaisderivaatat ovat

$$\partial_x f = y$$
$$\partial_y f = x - 1.$$

Kriittiseksi pisteeksi nähdään piste $(1, 0)$, jossa ei ole ääriarvoa. Tämä saadaan esim. käyttämällä ääriarvokriteeriä. Tarkistetaan jälleen reuna erikseen.Merkitään tarvittavia ehtoja seuraavasti

$$\phi_1(x, y) = x + y$$
$$\phi_2(x, y) = y - x^3.$$

Tässä siis ehto $\phi_1 = 0$ määrittelee reunan alaosan ja $\phi_2 = 0$ reunan yläosan. Oikea reuna on $x = 2$ ja se tulee käsitellä suoraan sijoituksella. Tarkistamme ensin ehdon ϕ_1 eli

$$\phi_1(x, y) = x + y = 0$$
$$\partial_x f + \lambda\partial_x\phi_1 = y + \lambda = 0$$
$$\partial_y f + \lambda\partial_y\phi_1 = x - 1 + \lambda = 0.$$

Kuten edellä ratkaisemme tästä $x = \frac{1}{2}$ sekä $y = -\frac{1}{2}$. Toinen ehto antaa

$$\phi_2(x, y) = y - x^3 = 0$$
$$\partial_x f + \lambda\partial_x\phi_1 = y - 3\lambda x^2 = 0$$
$$\partial_y f + \lambda\partial_y\phi_1 = x - 1 + \lambda = 0.$$

Kriittisiksi pisteiksi löydetään $(0, 0)$ sekä $(\frac{3}{4}, \frac{27}{64})$. Oikeanpuolinmainen raja on vielä tarkistettava. Laittamalla $x = 2$ saadaan $f(2, y) = y$, *joten f saa arvot väliltä $[-2, 8]$. Lasketaan vielä arvot kriittisissä pisteissä*

$$f(0,0) = 0$$
$$f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$$
$$f(\frac{3}{4}, \frac{27}{64}) = \frac{27}{256}.$$

Siis suurin arvo on 8 ja pienin -2.
Huomautus*: kuten edellisessä tehtävässä, voidaan myös käyttää sijoituksia $y = -x$ ja $y = x^3$.Myös f on harmoninen.*

Tehtävä 3. *Olkoon $h(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, kun $(x,y) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$. Osoitamme että h:lla ei saa suurinta eikä pienintä arvoa. Tätä varten tarkastellaan h:n käyttäytymistä suorilla $y = cx$, jossa $c \in \mathbb{R}$. Siis*

$$\phi(x) = h(x, cx) = \frac{x}{x^2(1+c^2)},$$

josta nähdään kun $x \to 0\pm$, niin $\phi(x) \to \pm\infty$. Mikä osoittaa väitteen. Tehtävä voidaaan ratkaista myös osoittamalla että h on differentioituva avoimessa joukossa $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ja että sillä ei ole kriittisiä pisteitä.

Tehtävä 4. *Maksimoidaan ensin sen suorakulmaisen särmiön tilavuus,jonka eräs kulma on origossa. Merkitään sen origosta lähtevien sivujen pituuksia x:llä , y:llä ja z:lla. Vaadimme tietenkin että nämä ovat positiivisia. Särmiön tilavuus on $V(x,y,z) = xyz$. Koska särmiö täytyy sovittaa ellipsoidin sisään, niin saadaan ehto*

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{1}{25}z^2 - 1.$$

Käyttämällä jälleen Lagrangen kertoja menetelmää saadaan

$$\partial_x f + \lambda \partial_x \phi = yz - 2\frac{1}{4}\lambda x = 0$$
$$\partial_y f + \lambda \partial_y \phi = xz - 2\frac{1}{9}\lambda y = 0$$
$$\partial_z f + \lambda \partial_z \phi = xy - 2\frac{1}{25}\lambda z = 0.$$

Kahdesta ylemmästä saadaan $y^2 = \frac{9}{4}x^2$, sekä ylinmästä ja alinmasta $z^2 = \frac{25}{4}x^2$. Sijoittamalla nämä ehtoon $\phi = 0$ saadaan $x^2 = \frac{4}{3}$. Josta siis $y^2 = \frac{9}{3}$ sekä $z^2 = \frac{25}{3}$. Kysytyn särmiön tilavuudeksi saadaan täten $8xyz = \frac{80}{3}\sqrt{3}$ symmetrian nojalla. On hyvä vielä todeta että tilavuudella ei ole kriittisiä pisteitä ellipsoidin sisällä paitsi origossa (mikä ei kelpaa ratkaisuun).