① Huom. $(0,0) \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} = \mathbb{R}^2$ (= f:n määrittelyjoukon sulkeuma), joten ainakin tämä ehto on toteutettu (vrt. Huom 2.2.2).

Tarkastellaan seuraavia $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:n jonoja: $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $x_k = (k^{-1}, k^{-1})$, ja $(y_k)_{k=1}^{\infty}$, $y_k = (k^{-1}, 0)$. Tällöin $x_k \to (0,0)$ ja $x_k \neq (0,0)$ jokaisella $k \in \mathbb{N}_+$. Samoin $y_k \to (0,0)$ ja $y_k \neq (0,0)$ jokaisella $k \in \mathbb{N}_+$. Nyt

$$f(x_k) = f(k^{-1}, k^{-1}) = 0 \to 0, \text{ kun } k \to \infty, \text{ ja}$$
$$f(y_k) = f(k^{-1}, 0) = 1 \to 1, \text{ kun } k \to \infty.$$

Koska nämä raja-arvot ovat eri suuret, ei raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ole olemassa.

② Nytkin $(0,0)$ kuuluu f:n määrittelyjoukon $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sulkeumaan $\mathbb{R}^2$, joten ainakin tämä ehto on toteutettu.

Tarkastellaan seuraavia $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:n jonoja: $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $x_k = (k^{-1}, 0)$, ja $(y_k)_{k=1}^{\infty}$, $y_k = (k^{-1/2}, k^{-1})$. Tällöin $x_k \to (0,0)$ ja $x_k \neq (0,0)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_+$. Samoin $y_k \to (0,0)$ ja $y_k \neq (0,0)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_+$. Nyt

$$f(x_k) = f(k^{-1}, 0) = 0 \to 0, \text{ kun } k \to \infty, \text{ ja}$$
$$f(y_k) = \frac{k^{-2/2} k^{-1}}{k^{-4/2} + 2k^{-2}} = \frac{k^{-2}}{k^{-2} + 2k^{-2}} = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}, \text{ kun } k \to \infty.$$

Koska nämä raja-arvot ovat erisuuret, ei raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ole olemassa.

③ (a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{xy} + e^x \cos(x+y^2)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) + \left(\frac{\partial}{\partial x} e^x\right)\cos(x+y^2) + e^x \frac{\partial}{\partial x}\cos(x+y^2) \\ &= y e^{xy} + e^x \cos(x+y^2) + e^x(-\sin(x+y^2)) \\ &= y e^{xy} + e^x(\cos(x+y^2) - \sin(x+y^2)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x e^{xy} + e^x(-\sin(x+y^2) \cdot 2y) \\ &= x e^{xy} - 2y e^x \sin(x+y^2).\end{aligned}$$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2} + \sin^2(x_1) + \cos^2(x_3)$.

$D_1 g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2} + 2\sin(x_1)\cos(x_1)$.

$D_2 g(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2}$.

$D_3 g(x_1, x_2, x_3) = 2\cos(x_3)(-\sin(x_3)) = -2\cos(x_3)\sin(x_3)$.

(4) Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ehdon

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x_2 \leq 0, \text{ ja} \\ 1, & \text{kun } x_2 > 1, \end{cases}$$

määrittelemä. Tällöin

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = \begin{cases} \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0, & \text{kun } x_2 \leq 0, \text{ ja} \\ \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0, & \text{kun } x_2 > 1, \end{cases}$$

siis $\partial_1 f(x_1, x_2, x_2)$ on olemassa ja $\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 0$ kaikilla $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Osoitetaan vielä, että f ei ole jatkuva origossa. Tarkastellaan tätä varten jonoa $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $x_k = (k^{-1}, k^{-1}, k^{-1})$. Nyt $x_k \to (0,0,0)$ ja $f(x_k) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0,0,0)$. Siis f ei ole jatkuva origossa. (Muokkaamalla edellä olevaa tarkastelua hieman nähdään, että f ole jatkuva pisteissä $(x, 0, z)$, $x, z \in \mathbb{R}$.)

(5) On näytettävä, että jokaisessa pisteessä $u \in \mathbb{R}^2$ pätee jollakin $a \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - f(u) = a \cdot (x - u) + |x - u| \,\varepsilon(x - u),$$

missä ε on sellainen funktio, että $\lim_{x \to u} \varepsilon(x - u) = 0$. Tämän todistamiseksi menetellään seuraavasti. (1) lasketaan erotus $f(x) - f(u)$, (2) otetaan siitä erikseen termistä $(x-u)$ lineaarisesti riippuva osuus $a \cdot (x-u)$ niin, että kun loppu kirjoitetaan muotoon $|x-u|\,\varepsilon(x-u)$, pätee $\lim_{x \to u} \varepsilon(x-u) = 0$.

Osoitetaan aluksi, että f on derivoituva (eli differentioituva) pisteessä $(2,0)$. Kun $x \neq (2,0)$,

$$f(x) - f(2,0) = \frac{x_2^3}{|x - (2,0)|} - 0 = (0,0) \cdot (x - (2,0)) + |x - (2,0)| \frac{x_2^3}{|x - (2,0)|^2}.$$

(Tässä $a = (0,0)$ ja $\varepsilon(x - (2,0)) = x_2^3 / |x - (2,0)|^2$, kun $x \neq (2,0)$.) Nyt

$$0 \le \frac{|x_2^3|}{|x-(2,0)|^2} = \underbrace{\frac{x_2^2}{(x_1-2)^2+x_2^2}}_{\ge x_2^2} |x_2| \le |x_2|$$

(Huom. kirjan 1. painoksen sivun 19 puolivälissä oleva (todistuksen 2) alku) mutkikas arvio voidaan korvata vastaavanlaisella yksinkertaisemmalla arviolla.

(Siis, jos jonolla $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ pätee $x_k \neq (2,0)$ kaikille $k \in \mathbb{N}_+$ ja $x_k \to (2,0)$, niin $0 \le |\mathcal{E}(x_k-(2,0))| \le x_{k,2} \to 0$, kun $k \to \infty$. Siis kuristusperiaatteen nojalla (Analyysi I) $\mathcal{E}(x_k-(2,0)) \to 0$, kun $k \to \infty$.) Niinpä $\lim_{x \to (2,0)} \mathcal{E}(x-(2,0)) = 0$. Siis f on derivoituva pisteessä $(2,0)$.

Kun $x \neq (2,0)$, on funktiolla

$$f(x) = f(x_1,x_2) = \frac{x_2^3}{\sqrt{(x_1-2)^2+x_2^2}}$$

olemassa jatkuvat osittaisderivaatat

$$\partial_1 f(x_1,x_2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x_2^3}{((x_1-2)^2+x_2^2)^{3/2}} \cdot 2(x_1-2)$$

$$\partial_2 f(x_1,x_2) = \frac{3x_2^2}{\sqrt{(x_1-2)^2+x_2^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2^3}{((x_1-2)^2+x_2^2)^{3/2}} \cdot 2x_2 .$$

Niinpä f on derivoituva joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$ Lauseen 2.5.2 perusteella.

Siis f on derivoituva (eli differentioituva) koko $\mathbb{R}^2$:ssa.

6 $\nabla f(x,y) = (\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)) = (e^{y^2}, 2xye^{y^2})$. Siis $\nabla f(1,1) = \underline{(e, 2e)}$.

$\nabla f(x,y) \neq (0,0)$, sillä $\partial_1 f(x,y) = e^{y^2} \neq 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$.